

*Semestre 4*  
*Filière SMP*

# Sujet des examen

[Clubnajah2013@gmail.com](mailto:Clubnajah2013@gmail.com)  
[www.clubnajah.blogspot.com](http://www.clubnajah.blogspot.com)  
[www.facebook.com/succes.club](http://www.facebook.com/succes.club)

Année universitaire : 2014/2015

**Examen d'électronique**  
(Durée : 1h 30 mn)

**Exercice 1**

Soit le circuit de la figure-1

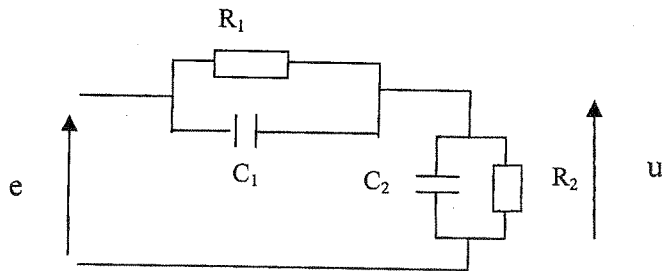


Figure-1

- 1) Calculer le rapport  $\frac{u}{e}$  du circuit
- 2) Quelles sont ses valeurs limites quand  $\omega \rightarrow 0$  et  $\omega \rightarrow \infty$  ?
- 3) Quelles relations doivent vérifier  $R_1$ ,  $C_1$ ,  $R_2$ ,  $C_2$  pour que ces limites soient identiques

**Exercice 2**

Soit le circuit de la figure-2

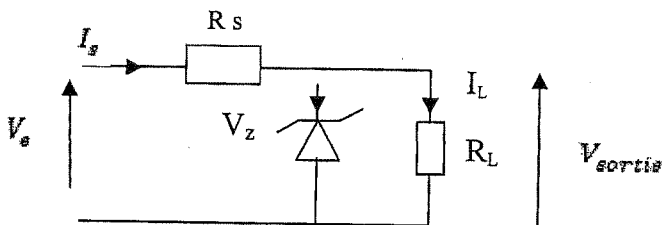


Figure-2

Le circuit de régulation Zener de la figure-2, alimenté par une tension, d'entrée de 15 V, se compose d'une résistance série  $R_s$  de  $82 \Omega$  et d'une diode Zener possédant les caractéristiques suivantes :

$V_Z = 6.8 \text{ V}$  ;  $I_{Z_{\min}} = 2 \text{ mA}$  ;  $I_{Z_{\max}} = 90 \text{ mA}$  . Calculer :

- 1) La chute de tension dans la résistance  $R_s$
- 2) Le courant d'alimentation  $I_s$
- 3) Donner l'expression de la résistance  $R_{L_{\min}}$  et  $R_{L_{\max}}$
- 4) Calculer les valeurs de  $R_{L_{\min}}$  et  $R_{L_{\max}}$  permettant un fonctionnement normal du circuit de régulation.

### Exercice 3

On réalise un contact entre un Semi-conducteur dopé N et le même dopé P. Il apparaît donc une barrière de potentiel  $V_d$  dite potentiel de diffusion entre les deux frontières de la ZCE

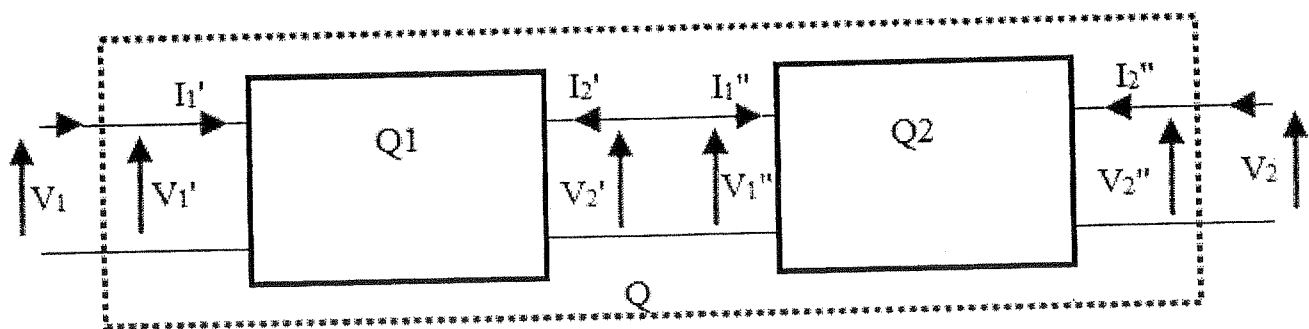
- a) Exprimer cette barrière de potentiel  $V_d$  en fonction de la densité intrinsèque  $n_i$  avant dopage, des densités  $N_A$  et  $N_D$  , et de la température  $T$ .
- b) On soumet la jonction à une polarisation directe, il y a apparition d'un courant direct. Expliquer l'origine de ce courant.
- c) Lorsqu'une diode est bloquée, on note la présence d'un courant inverse très faible. Quelle est l'origine de ce courant ?

Examen (1H 30mn)

Exercice 1

On se propose d'étudier la fonction de transfert du quadripôle Q équivalent à l'association en cascade de deux quadripôles, Q1 et Q2, représentés par leurs matrices de transmission, respectivement,  $T_1$  et

$$T_2, \text{ où } T_1 = \begin{pmatrix} 1 + j\omega RC & R \\ j\omega C & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T_2 = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{j\omega RC} & \frac{1}{j\omega C} \\ \frac{1}{R} & 1 \end{pmatrix}$$



On rappelle que la matrice de transmission  $T$  est définie par la relation matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad T = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

- 1 pt 1. Montrer que la fonction de transfert à vide,  $H$ , d'un quadripôle, s'exprime comme suit :

$$H = \frac{1}{A}$$

- 1 pt 2. Montrer que la fonction de transfert,  $H(j\omega)$ , du quadripôle équivalent Q, est donnée par :

$$H(x) = \frac{1}{3} \times \frac{3jx}{1 + 3jx + (jx)^2} \quad \text{où } x = \omega RC$$

- 1 pt 3. Déterminer l'expression du gain  $G(\omega) = |H|$

- 1 pt 4. Etudier puis dresser le tableau de variations du gain  $G(\omega)$ . On donne :

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^2 + 9x^2}} \right) = - \frac{(x^2-1)(x^2+1)}{[(1-x^2)^2 + 9x^2]^{\frac{3}{2}}}$$

- 1 pt 5. Donner les valeurs de  $G(\omega)$  quand  $\omega$  tend vers 0 ou l'infini.

- 1 pt 6. Donner la valeur maximale de  $G(\omega)$  :  $G_0$

- 2 pts 7. Déterminer  $\omega_1$  et  $\omega_2$  pour que  $G(\omega_1) = G(\omega_2) = G_0/\sqrt{2}$

- 1 pt 8. Calculer la largeur de la bande passante, du quadripôle Q, définie par  $\Delta\omega = |\omega_2 - \omega_1|$

UCC CLUB NAJAH+  
UCD.FS.ELJADIDA  
LE PRÉSIDENT

## Exercice 2

On considère un cristal de silicium (Si) intrinsèque sous forme de barreau (figure 1), On désire réaliser une jonction PN

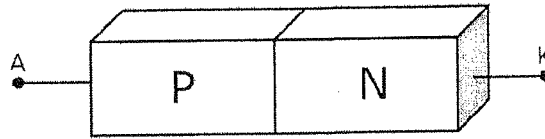


Figure 1

### Questions de cours

- 1 pt 1. Par quelle procédure réalise-t-on un semi-conducteur de type P et un semi-conducteur de type N ?
- 2 pts 2. Dans quelle colonne du tableau de classification périodique allons-nous choisir les atomes d'impuretés servant à réaliser la jonction, pour quelles raisons ?
- 1 pt 3. Comment s'appelle la région qui se crée au niveau du plan de la jonction, donner au moins deux appellations ?
- 1 pt 4. Quels sont les états de polarisations possibles d'une jonction PN ?
- 1 pt 5. Qu'arrive-t-il à la zone créée au niveau du plan de cette jonction PN pour chaque état de polarisation ?

### Etude de la jonction en Si

En absence de polarisation et à  $T = 300^\circ \text{K}$ , seulement 20% de la largeur totale de la zone de charge d'espace est sur le côté p. La tension de diffusion est  $V_d = 0,90 \text{V}$ . Déterminer :

- 1 pt 6. La concentration des accepteurs  $N_A$  dans la région P
- 1 pt 7. La concentration des donneurs  $N_D$  dans la région N
- 1 pt 8. La largeur de la zone de charge d'espace du côté N :  $x_n$
- 1 pt 9. La largeur de la zone de charge d'espace du côté P :  $x_p$
- 1 pt 10. La valeur maximale du champ électrique,  $E_{max}$ , dans la zone de déplétion.

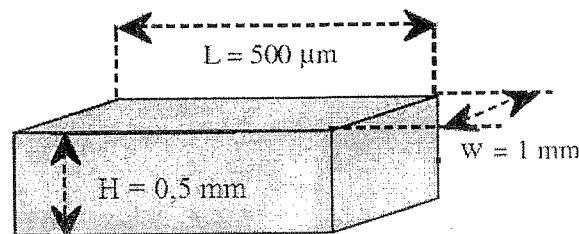
Pour le silicium on donne : à  $T = 300^\circ \text{K}$  :  $n_i = 1 \times 10^{10} \text{ cm}^{-3}$  et  $KT = 0.026 \text{ eV}$ ;  $E_g = 1,124 \text{ eV}$  ;  $\epsilon_r = 11,7$  ;  $\epsilon_0 = 8,854 \times 10^{-12} \text{ F/m}$  ( $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0 \approx 10^{-10} \text{ F/m}$ ) ;  $e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$

Examen (1H 30mn)  
Session de Rattrapage – Juin 2013

\*CLUB NAJAH+  
UCD.FS.ELJADIDA  
LE PRÉSIDENT

### Exercice 1

On considère un barreau, en silicium du type N, dont les dimensions sont illustrées à la figure au-dessous. La résistivité de l'échantillon est  $\rho = 1 \Omega.m$  à  $T = 300^\circ K$ .



- 1) Donner la conductivité  $\sigma$  du barreau (0,5 pt)
- 2) Calculer la résistance,  $R$ , du barreau (1 pt)
- 3) Déterminer l'expression ainsi que la valeur de la densité des dopants  $N_D$ , on suppose que  $N_D \gg n_i$  où  $n_i$  est la densité intrinsèque des porteurs de charge (2,5 pts)
- 4) Calculer la position du niveau de fermi  $E_{Fn}$  par rapport au niveau de Fermi intrinsèque  $E_{Fi}$  :  $\Delta E_F = E_{Fn} - E_{Fi}$  ? (2,5 pts)
- 5) On dope ce semi-conducteur, qui est de type N, avec des atomes de la colonne III pour qu'il devienne de type P avec un niveau de Fermi  $E_{Fp}$  situé à  $\Delta E_F$  du niveau intrinsèque  $E_{Fi}$  à 300K.
  - a) Comment s'appellent ces atomes ? (0,5 pt)
  - b) Représenter le diagramme des niveaux énergétiques après ce dopage (0,5 pt)
  - c) Calculer la densité  $N_A$  des atomes à doper. (2,5 pts)

Données :  $n_i = 1 \times 10^{10} cm^{-3}$ ,  $\mu_n = 1500 cm^2 V^{-1}.s^{-1}$ ,  $\mu_p = 475 cm^2 V^{-1}.s^{-1}$ ,  $KT = 0,026 eV$  à  $T=300^\circ K$

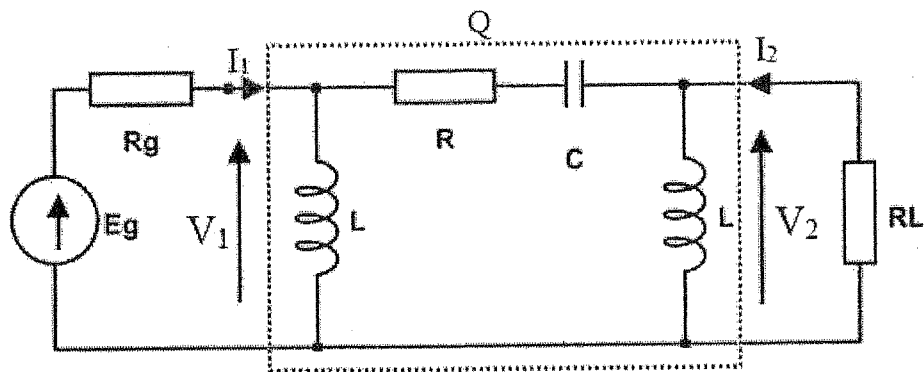
Fais tourner la page STP

Page 1/2



## Exercice 2

On considère le quadripôle Q du montage ci-dessous,



- 1) Déterminer l'impédance d'entrée  $Z_e$  et de sortie  $Z_s$  de ce quadripôle (1,5 pts)
- 2) Déterminer la fonction de transfert à vide :  $H(j\omega)$  (2 pts)

Mettez  $H$  sous la forme suivante:  $H = \frac{1}{1 - j\tau\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}}$  et donner les expressions de  $\tau$  et  $\omega_0$

- 3) Déterminer l'expression du module de  $H$ ,  $|H|$ , puis étudier et dresser son tableau de variations en fonction de  $\omega$  en indiquant les valeurs de  $|H|$  aux extrémités. (3 pts)
- 4) Donner une définition de la fréquence de coupure  $\omega_c$  (0,5 pt)
- 5) Déterminer l'expression de  $\omega_c$  (1 pt)
- 6) Tracer la courbe de  $|H(j\omega)|$  (1 pt)
- 7) Quelle est la fonction de ce quadripôle (1 pt)

Examen (1H 30mn)  
Session de Rattrapage

**Exercice 1 : (les quatre questions de cet exercice sont indépendantes)**

Densités des porteurs

1. Considérons deux matériaux à semi-conducteurs, dopés, le GaAs et le Si. A quelle température la densité intrinsèque,  $n_i$ , du GaAs est égale à celle du Si à 200°K?

**Données : GaAs :**  $N_c = 4.7 \times 10^{17} \text{ cm}^{-3}$ ,  $N_v = 7.0 \times 10^{18} \text{ cm}^{-3}$ ,  $E_g = 1.424 \text{ eV}$

**Si :**  $N_c = 2.8 \times 10^{19} \text{ cm}^{-3}$ ,  $N_v = 1.04 \times 10^{19} \text{ cm}^{-3}$ ,  $E_g = 1.12 \text{ eV}$

Transport électronique

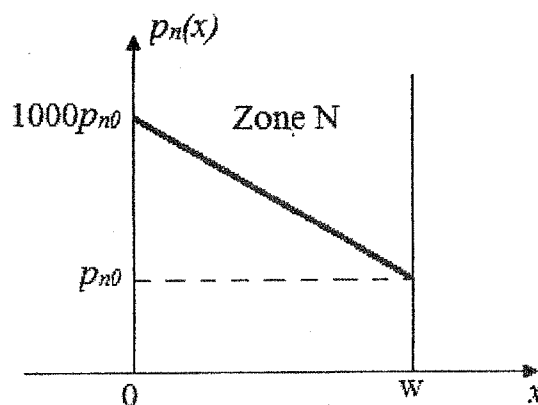
2. Trouver la résistivité d'un échantillon du Si dopé avec :
  - a. Du Phosphore :  $1.0 \times 10^{14} \text{ cm}^{-3}$  ( $Z_{\text{Ph}} = 15$ )
  - b. De l'Arsenic :  $8.5 \times 10^{12} \text{ cm}^{-3}$  ( $Z_{\text{As}} = 33$ )
  - c. Du Bore :  $1.2 \times 10^{13} \text{ cm}^{-3}$  ( $Z_{\text{B}} = 5$ )

NB : les atomes dopés peuvent être des donneurs ou des accepteurs (voir leurs groupes dans le tableau périodique). **Données :** Si :  $\mu_n = 1500 \text{ cm}^2 \cdot \text{V}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $\mu_p = 500 \text{ cm}^2 \cdot \text{V}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$

3. Déterminer la vitesse de dérivée (de conduction) des électrons et des trous à travers une couche du silicium, Si, intrinsèque d'épaisseur 10  $\mu\text{m}$  soumise à une tension égale à 1V.

**Données :** Si :  $\mu_n = 1500 \text{ cm}^2 \cdot \text{V}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $\mu_p = 500 \text{ cm}^2 \cdot \text{V}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$

4. L'injection des trous, d'une manière stationnaire, dans un échantillon de Si, dopé, de type N ( $N_D = 10^{16} \text{ cm}^{-3}$ ) résulte à une densité  $p_n(x)$  des trous représentée par la figure au-dessous où  $p_{n0}$  est la densité des trous à l'équilibre (avant injection). ( $W = 5 \mu\text{m}$ )





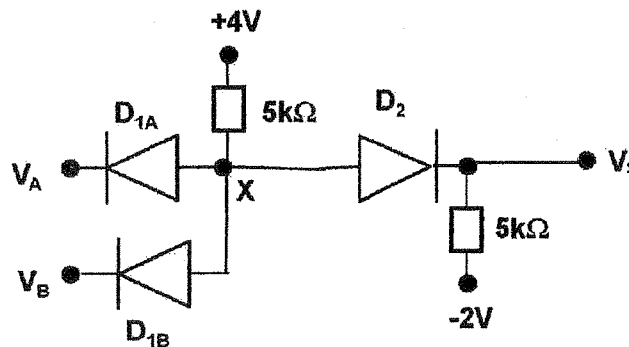
- Donner le type du courant des trous qui circule suivant la direction  $x$ ?
- Calculer la densité de ce courant. On prend  $n_i = 1.5 \times 10^{10} \text{ cm}^{-3}$

**Données :** La constante de Boltzmann  $K = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$ , La température ambiante :  $T = 300^\circ\text{K}$

#### Exercice 4 : Etude de diodes (4 pts)

Toutes les diodes PN au-dessous sont supposées idéales ayant une tension de seuil  $V_s = 0.6 \text{ V}$  quand ils sont "ON" (passantes)

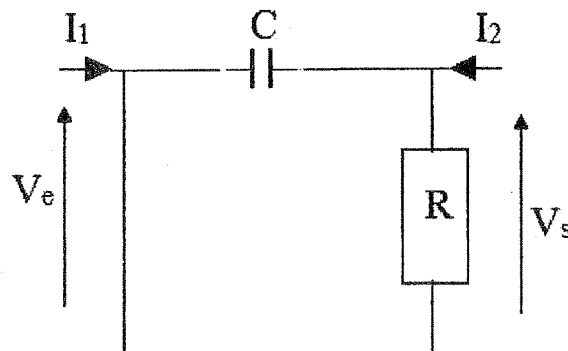
Indiquez dans le tableau l'état des diodes  $D_{1A}$ ,  $D_{1B}$  et  $D_2$  (Passante : ON ou Bloquée : OFF) selon les valeurs données de  $V_A$  et  $V_B$ . Indiquer également les valeurs numériques correspondantes de  $V_s$ . **Justifier les réponses.**



$V_A(\text{V})$	$V_B(\text{V})$	$D_{1A} \text{ (ON/OFF)}$	$D_{1B} \text{ (ON/OFF)}$	$D_2 \text{ (ON/OFF)}$	$V_s(\text{V})$
0	0				
0	+4				
+4	+4				

#### Exercice 3 :

Considérons le montage d'un quadripôle non chargé au-dessous,



- Déterminer l'impédance d'entrée  $Z_e$  et de sortie  $Z_s$  du quadripôle en fonction de  $Z_C$  et de  $R$
- Déterminer la fonction de transfert  $H(j\omega)$
- Donner les valeurs du module de  $H$  aux extrémités
- Quelle est le type de ce filtre ?

Examen (1H 30mn)

Nom : .....

Prénom : .....

Numéro d'examen : .....

+CLUB NAJAH+  
UCB FS EL JADIDA  
LE PRÉSIDENT

**Exercice I: Questions de cours (5pts)**

1. Cocher la case convenable

<i>Vrai</i>	<i>Faux</i>	
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	A température ambiante, les électrons dans la bande de valence se déplacent librement et ont plus d'énergie que ceux de la bande de conduction.
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	Dans le silicium, l'énergie thermique disponible à la température ambiante est suffisante pour déplacer des électrons vers la bande de conduction.
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	Les matériaux isolants ont une petite largeur de bande interdite et une bande de conduction partiellement remplie à la température ambiante.
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	En électronique, le terme "trou" définit un emplacement dans un matériau à l'état solide qui peut être rempli par un atome d'impureté.
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	A haute température, un matériau semi-conducteur intrinsèque aura plus d'électrons que des trous.
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	La zone de charge d'espace dans la jonction PN est créée par la diffusion de porteurs majoritaires dans le matériau adjacent où il existe moins de porteurs de ce type.

2. Marquez la bonne réponse:

A température ambiante, l'ajout d'impuretés à un matériau semi-conducteur n'affectera pas :

☐  
☐

- a) la concentration de porteurs libres  
c) le niveau de Fermi

☐  
☐

- b) la densité intrinsèque de porteurs  
d) la densité d'atomes ionisés

Une diode polarisée en direct aura : (choisir la meilleure réponse)

☐  
☐

- a) un fort courant de conduction  
c) un faible courant de conduction

☐  
☐

- b) un fort courant de diffusion  
d) un faible courant de diffusion

## Exercice 2: Etude de la jonction PN (5 pts)

On considère une jonction PN abrupte en GaAs. Les densités de dopage des atomes donneurs et accepteurs sont données comme suit,

$$N_d = 10^{17} \text{ cm}^{-3}, N_a = 10^{15} \text{ cm}^{-3}$$

1. Déterminer la hauteur de la barrière de potentiel
2. Déterminer les largeurs de la zone de charge d'espace (ZCE)  $x_n$  et  $x_p$  respectivement dans la zone N et dans la zone P (*indice : remarquer que  $N_d = 100N_a$* )
3. Dédurre la largeur de la ZCE
4. Calculer la capacité de cette jonction dont la section est  $S = 10^{-4} \text{ cm}^2$

**Données :**

Pour GaAs à 300°K:

$$E_g = 1.424 \text{ eV} \quad n_i = 2.1 \times 10^6 \text{ cm}^{-3}$$

$$\text{Permittivité du vide: } \epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-14} \text{ F/cm}$$

$$\text{Energie thermique à 300°K : } kT = 0.0259 \text{ eV}$$

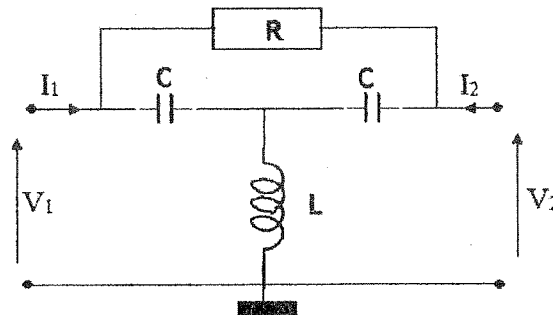
$$\text{Permittivité relative : } \epsilon_r = 12.9$$

$$q = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$$

## Exercice 3 (6 pts)

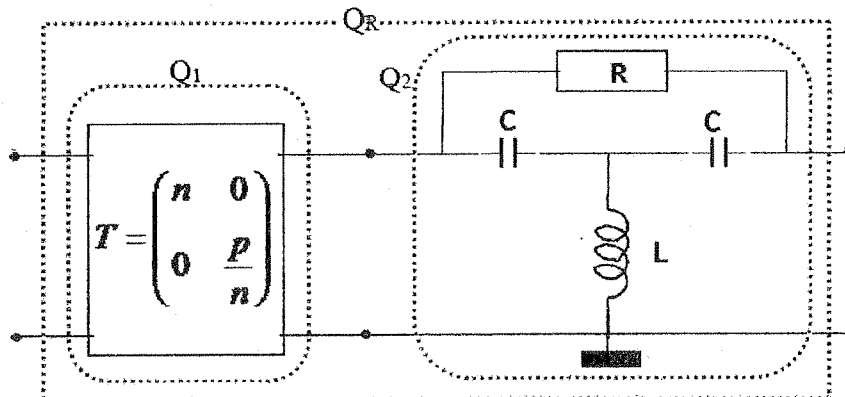
On considère le quadripôle en T ponté au-dessous,

1. Donner le classement de ce quadripôle (son type)
2. Déterminer, en utilisant une méthode courte, la matrice admittance de ce quadripôle (on pose  $p = j\omega$ )



Considérons maintenant l'association en cascade, illustrée au-dessous, d'un quadripôle  $Q_1$  représenté par sa matrice de chaîne T, où  $p = j\omega$ , et du quadripôle précédent nommé  $Q_2$ .

3. Faites les calculs nécessaires pour déterminer la fonction de transfert  $H(p)$  du quadripôle résultant  $Q_R$ .



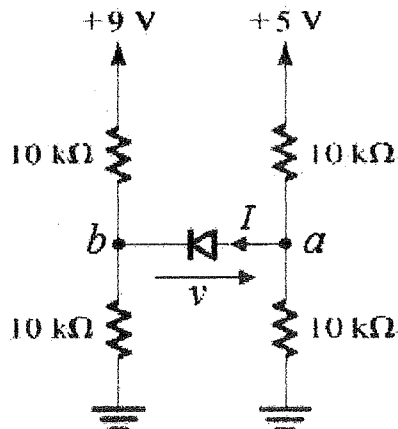
On rappelle que les éléments de la matrice de chaîne peuvent s'exprimer en fonction de ceux de la matrice admittance comme suit,

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{y_{22}}{y_{21}} & \frac{1}{y_{21}} \\ -\frac{\Delta y}{y_{21}} & \frac{y_{11}}{y_{21}} \end{pmatrix} \text{ où } \Delta y = y_{11}y_{22} - y_{12}y_{21}$$

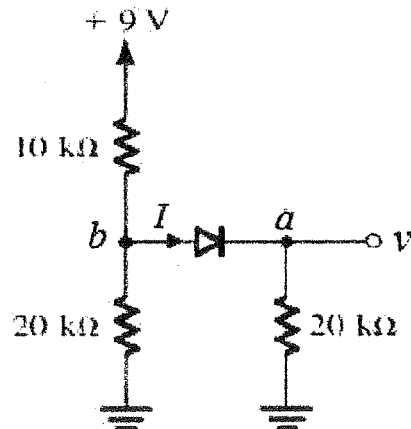
4. La fonction de transfert sera-t-elle affectée par l'inversion des deux quadripôles? Justifier la réponse.

#### Exercice 4 : Etude des diodes

Les diodes utilisées ci-dessous sont supposées idéales ayant une tension de seuil  $V_s = 0.6 \text{ V}$ .  
 Pour chaque montage appliquer le théorème de Thévenin, puis calculer le courant  $I$  et la tension  $v$ .  
Indiquer également l'état de chaque diode.



Montage 1



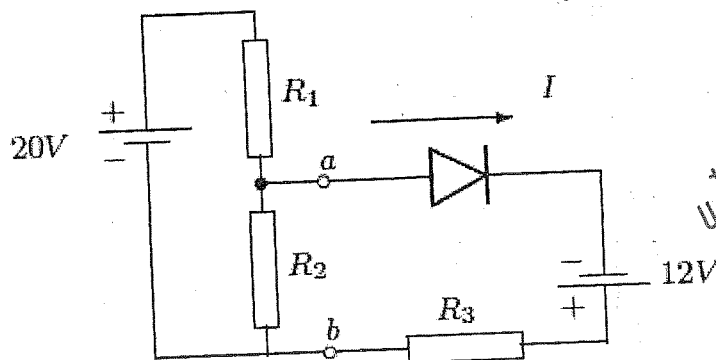
Montage 2

Epreuve d'Electronique

Exercice 1 :

Sachant que  $R_1 = R_2 = 1k\Omega$  et  $R_3 = 2k\Omega$ ,

- 1) Donner les caractéristiques du générateur de Thevenin équivalent entre a et b.
- 2) Calculer le courant  $I$  qui traverse la diode. On prendra  $V_s = 0,6V$  aux bornes de la diode.

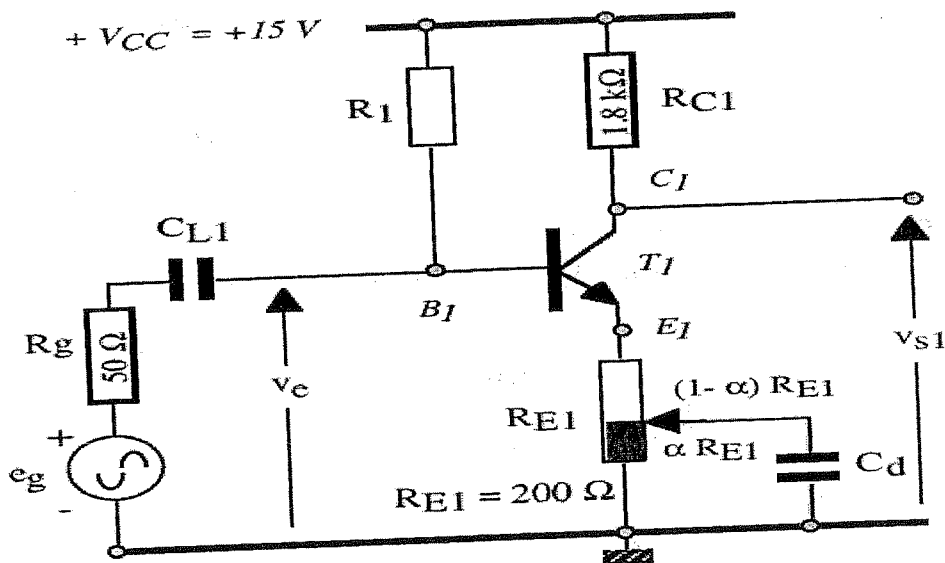


\*CLUB NAJAH+  
UCD.FS.ELJADIDA  
LE PRÉSIDENT

Exercice 2 :

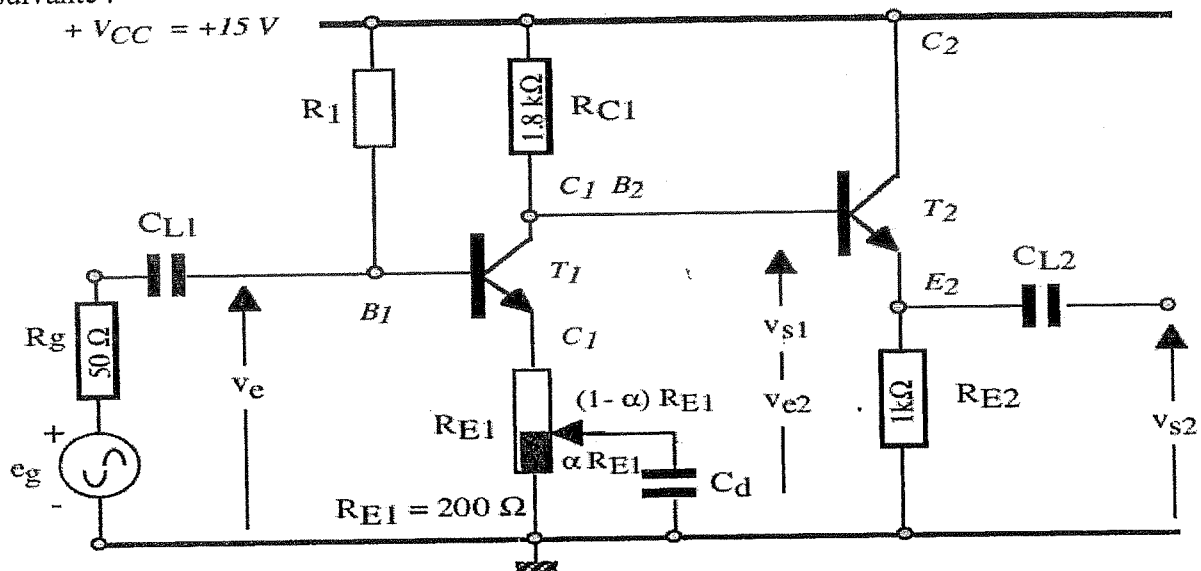
On considère le montage utilisant le transistor  $T_1$  donné en Fig. 1.  
En alternatif, l'impédance des condensateurs est considérée comme étant nulle.

Dans l'émetteur de  $T_1$ , on dispose d'un potentiomètre tel que seul la portion  $\alpha R_{E1}$  de sa résistance  $R_{E1}$  soit découplée à la masse par le condensateur  $C_d$ , avec  $0 \leq \alpha \leq 1$ .



- 1) Donner le schéma équivalent en continu. De quel type de polarisation s'agit-il ?
- 2) Sachant que le courant collecteur au repos  $I_{C1} = 5 \text{ mA}$  et  $V_{BE} = 0,6 \text{ V}$ , déterminer la valeur de la résistance de polarisation  $R_1$ .
- 3) Calculer la tension  $V_{CE}$  au repos.
- 4) Donner le schéma équivalent du montage en dynamique (alternatif), en remplaçant le transistor par son schéma équivalent utilisant les paramètres hybrides. On négligera  $h_{12}$  et  $1/h_{22}$ .
- 5) Calculer le paramètre  $h_{11}$  pour le transistor  $T_1$ , on donne  $V_T = 26 \text{ mV}$  et  $h_{21} = \beta = 250$ .
- 6) Déterminer l'expression de l'impédance d'entrée  $Z_{e1}$  vue par le générateur d'excitation (eg, Rg). Calculer ses deux valeurs extrêmes.  $Z_{e1}(\alpha=0)$  et  $Z_{e1}(\alpha=1)$ .
- 7) Déterminer l'expression du gain en tension  $A_{v1} = V_{s1}/V_e$ . Calculer ses 2 valeurs extrêmes correspondant à  $\alpha=0$  et  $\alpha=1$ . Peut-on avoir, en même temps pour ce montage, un gain et une impédance d'entrée élevés ?.
- 8) Montrer que la résistance de sortie du montage  $Z_{S1}$  est égale à  $R_{C1}$ .

Le concepteur considère que cette résistance de sortie est trop élevée, Il décide d'ajouter un étage en utilisant un transistor  $T_2$  identique à  $T_1$  comme indique la Figure suivante :



- 9) Sachant que  $R_{E2} = 1 \text{ k}\Omega$ , calculer le point de repos  $Q(I_{C2}, V_{CE2})$  du transistor  $T_2$ .
- 10) Donner le schéma équivalent du montage du transistor  $T_2$  entre  $V_{S1}$  et  $V_{S2}$ . Calculer son gain en tension  $A_{v2} = V_{s2}/V_{s1}$  et montrer que sa valeur est sensiblement égale à 1.  
Que devient alors le gain complet  $A_v = V_{s2}/V_e$ .
- 11) Quel est l'utilité du montage du transistor  $T_2$ .



EXAMEN D'OPTIQUE 2 (SMP<sub>3</sub>)

Durée : 1h30mn

**Exercice I : Interféromètre de Michelson**

Un interféromètre de Michelson est éclairé par un faisceau parallèle ( $i = 0$ ) de lumière monochromatique de longueur d'onde  $\lambda_0$  (voir Figure ci-dessous). Les faisceaux ( $R_1$ ) et ( $R_2$ ) interfèrent au point O de l'écran E. Soit  $e$  l'épaisseur de la lame d'air équivalente,  $e = M_2M'_1$  où  $M'_1$  est image de  $M_1$  par rapport à  $S_p$ . On désignera  $I_0$  l'intensité de ( $R_1$ ) et ( $R_2$ ).

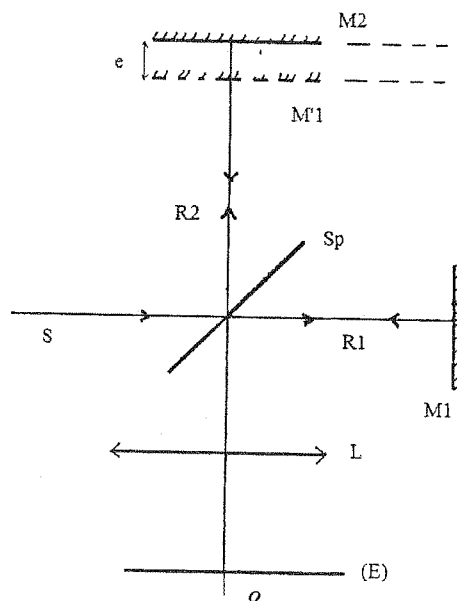
A) 1) Donner (sans démonstration) la différence de marche  $\delta$  entre ( $R_1$ ) et ( $R_2$ ). En déduire l'intensité  $I(e)$  de l'éclairement sur l'écran E.

2) Tracer le graphique  $I = I(e)$ . En déduire les épaisseurs  $e_m$  (positions du miroir  $M_2$ ) pour les quelles on obtient un minimum d'intensité.

3) De quelle distance  $\Delta$  doit-on déplacer le miroir mobile  $M_2$  pour que I passe d'un minimum à un autre ? En déduire  $\lambda_0$  en fonction de  $\Delta$ .

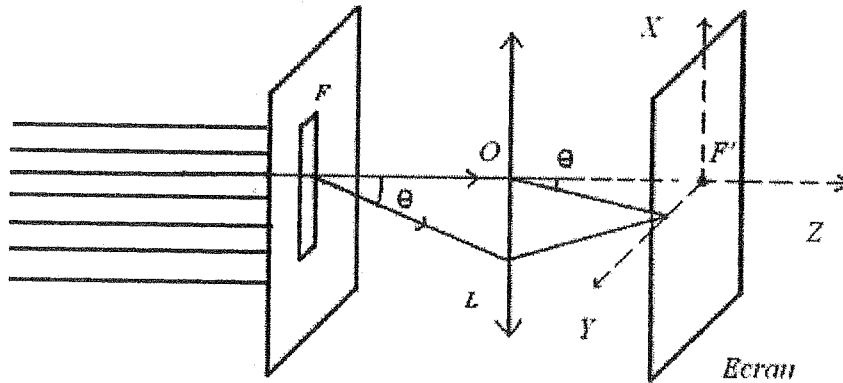
B) On suppose que le spot au point O est maximum (brillant) et on interpose une lame de verre d'épaisseur  $d$  inconnue et d'indice  $n = 1.5$  sur le trajet du rayon  $R_1$ .

4) Donner la nouvelle expression de d.d.m  $\delta'$  entre ( $R_1$ ) et ( $R_2$ ). Pour quelles épaisseurs  $d_m$  de la lame de verre obtient-on une tache sombre au point O ?



## Exercice II : Diffraction par deux fentes fines

On éclaire une fente  $F$  verticale par une onde plane monochromatique de longueur d'onde  $\lambda = 546 \text{ nm}$  en incidence normale. La longueur de la fente est supposée très grande par rapport à sa largeur  $a$ . Une lentille convergente  $L$  de distance focale  $f' = 1 \text{ m}$  permet d'observer dans son plan focal image la figure de diffraction à l'infini produite par  $F$ . L'écran ( $E$ ) est placé dans ce plan focal (voir schéma ci-dessous).



A-1) Donner (sans démonstration) l'expression de l'intensité  $I_1(\theta)$  diffractée, dans une direction du plan horizontal ( $YOZ$ ) faisant avec l'axe optique  $OZ$  un petit angle  $\theta$ ,  $I_0$  étant l'intensité résultante pour  $\theta = 0$ .

2) Tracer le graphique  $I_1 = I_1(y)$ . Décrire la figure de diffraction observée. Donner l'expression de la largeur  $\Delta$  de la tache centrale de diffraction en fonction de  $\lambda$ ,  $f'$  et  $a$ .

3) Déterminer  $a$  en fonction de  $\Delta$ . Calculer  $a$  lorsque  $\Delta = 4 \text{ mm}$ .

B) On remplace  $F$  par deux fentes (verticales) parallèles identiques  $F_1$  et  $F_2$  de largeur  $a$  et dont les centres sont distants de  $l$ , où  $\frac{l}{a} = 10$ .

4) Montrer brièvement que l'intensité  $I(\theta)$  (diffractée par les deux fentes) dans la direction

$\theta$  s'écrit  $I(\theta) = I_0 \left( \frac{\sin u}{u} \right)^2 \cdot \cos^2 \left( \frac{\varphi}{2} \right)$ , où  $\varphi$  est une différence de phase à déterminer.

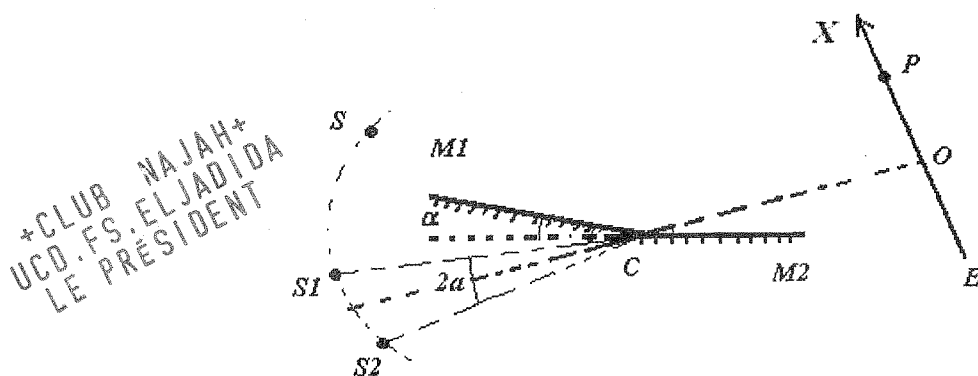
5) Tracer le graphique  $I = I(y)$ . Décrire la figure de diffraction obtenue (à comparer avec la tache de diffraction d'une seule fente). Déterminer l'interfrange  $i$  des franges d'interférence en fonction de  $l$ . Donner la valeur de  $i$ .

EXAMEN DE RATRAPAGE D'OPTIQUE 2

SMP3 (durée : 1H30mn)

Exercice I : Interférences par des miroirs de Fresnel

On considère deux miroirs plans adjacents  $M_1$  et  $M_2$  faisant entre eux un angle  $\alpha$  petit et une source ponctuelle monochromatique  $S$ . Les miroirs  $M_1$  et  $M_2$  donnent de la source  $S$  des images virtuelles  $S_1$  et  $S_2$  (voir figure ci-dessous). Un écran d'observation (E) est placé perpendiculairement à la bissectrice de  $(\widehat{CS_1CS_2})$  (parallèlement à  $S_1S_2$ ). On désigne par  $a$  la distance de l'arrête  $C$  à la source  $S$  (soit  $a=CS$ ), et  $b$  : la distance de  $C$  à l'écran (E),  $b=CO$ . On admet que  $S$ ,  $S_1$  et  $S_2$  sont situés sur un cercle de centre  $C$  (arrête des deux miroirs) et que l'angle  $(\widehat{CS_1CS_2}) = 2\alpha$ .



1) Déterminer la région de l'espace (champ d'interférence) où on peut observer des interférences entre les faisceaux réfléchis par  $M_1$  et  $M_2$ .

2) Montrer que la d.d.m. en un point  $P$  ( $\overline{OP} = x$ ) de (E) s'écrit  $\delta(x) = \frac{2\alpha \cdot a \cdot x}{(a+b)}$

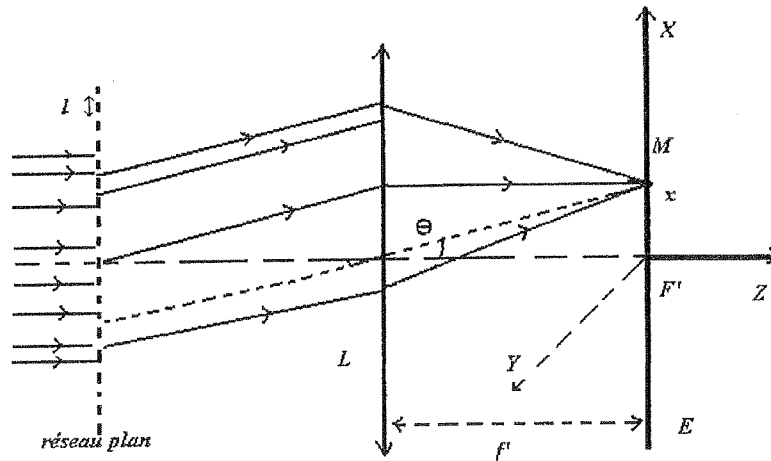
3) Donner l'expression de l'intensité  $I(x)$  sur l'écran E. Décrire la figure d'interférence obtenue sur (E). Déterminer les positions des franges brillantes et sombres ainsi que l'interfrange  $i$ .

4) Tracer le graphique  $I = I(x)$ .

5) Calculer la largeur  $L$  de la zone d'interférence sur (E). Déterminer le nombre de franges brillantes ainsi que le nombre de franges sombres observables dans la zone d'interférence. On donne,  $\lambda = 0,546 \mu\text{m}$ ,  $a = b = 1 \text{ m}$  et  $\alpha = 3.10^{-3} \text{ rd}$ .

## Exercice II : Diffraction par un réseau plan

On considère un réseau plan constitué de  $N$  fentes identiques, horizontales et perpendiculaires au plan de la figure. Ces fentes sont de largeur  $a$ , et leurs centres sont équidistants de  $l$ . On éclaire ce réseau en incidence normale par une onde plane monochromatique (voir schéma ci-dessous). On explore le champ d'interférence dans le plan focal  $xOy$  d'une lentille convergente  $L$  de distance focale  $f'$  et de foyer image  $F'$ , au point  $M(x)$  d'abscisse  $x$  ( $|x| \ll f'$ )



1) Montrer que l'amplitude  $A_1$  diffractée par chacune des fentes horizontales au point  $M$  dans la direction  $\theta$  peut s'écrire  $A_1 = a_0 \cdot \left( \frac{\sin u}{u} \right)$  avec  $u = \frac{\pi \cdot a \cdot \theta}{\lambda}$ .

2) Montrer que l'amplitude totale  $A_N$  diffractée par le réseau de  $N$  fentes, au point  $M$  s'écrit

$$A_N(\theta) = N \cdot a_0 \cdot \left( \frac{\sin u}{u} \right) \cdot \left( \frac{\sin N \frac{\varphi}{2}}{N \sin \frac{\varphi}{2}} \right), \text{ où } \varphi = \frac{2 \cdot \pi \cdot a \cdot \theta}{\lambda}.$$

3) En déduire l'expression de l'intensité totale  $I_N(\theta)$  diffractée au point  $M$ . Que devient cette expression dans le cas où les fentes sont infiniment fines (c.à.d.  $a \rightarrow 0$ )?

4) Tracer dans ce cas ( $a=0$ ) le graphique de l'intensité normalisée  $I_N(\theta)$  en fonction de  $\theta$ . Déterminer les directions  $\theta_m$  correspondant aux maximums principaux d'ordre  $m$  de la tache de diffraction.

5) Déterminer les positions des maximums principaux d'ordre 3. On donne  $l = 1,75 \mu\text{m}$ ,  $\lambda = 633 \text{ nm}$  et  $f' = 10 \text{ cm}$ .

## Session de rattrapage

Optique physique / Filière SMC<sub>3</sub> / 2013 - 2014

### EXERCICE 1 : fente fine 4 points

Une fente fine de largeur  $a$  est éclairée sous incidence normale par une longueur d'onde  $\lambda = 650 \text{ nm}$ . On observe sur un écran placé à  $D = 1 \text{ m}$  le minimum nul d'ordre 2 situé à  $x_2 = 13 \text{ mm}$  du centre O.

1. Rappeler l'expression de l'intensité  $I_{ff}(\theta)$  ( $ff$  comme fente fine) des ondes diffractées dans une direction  $\theta$ .
2. Pour les angles faibles déduire l'expression des positions angulaires  $\theta_k$  des  $k^{\text{ièmes}}$  minima en fonction de  $\lambda, k$  et  $a$ ?
3. Exprimer  $a$  en fonction de  $k, x_k, \lambda$  et  $f'$ . Calculer la valeur de  $a$ .

### EXERCICE 2 : ouverture circulaire 10 points

Soit une ouverture circulaire diffractante éclairée par un laser de longueur d'onde  $\lambda = 0,628 \mu\text{m}$ . Cette ouverture a un rayon  $\rho$  et placée au plan focal d'une lentille  $L_1$  convergente. Les rayons diffractés à l'infini, sous des directions  $\theta_k$ , sont collectés par une seconde lentille mince  $L_2$  convergente de distance focale  $f' = 1 \text{ m}$ . Le phénomène de diffraction est visualisé sur un écran E placé au plan focal de  $L_2$ .

1. Faites un schéma synoptique du montage (source, lentilles, écran et rayons lumineux) projeté dans le plan OXZ.
2. En se basant sur l'expression intégrale de l'amplitude complexe d'une onde diffractée par une ouverture plane de forme quelconque donnée par le principe de Huygens-Fresnel dans l'approximation de Fraunhofer, montrer que l'expression de l'intensité de la lumière diffractée par une ouverture circulaire est donnée par :

$$I = 4I_0 \left( \frac{J_1(m)}{m} \right)^2$$

3. Quelle est la nature des taches de diffraction données par cette ouverture circulaire?
4. Pour des inclinaisons faibles, exprimer les rayons angulaires  $\theta_m$  en fonction du paramètre  $m$ , de  $\lambda$ , et de  $\rho$ . En déduire les rayons  $r_m$  des anneaux formés au plan focal de  $L_2$ .

Les valeurs numériques de  $m$  sont données sur le tableau. On mesure le rayon de la tâche d'Airy on trouve que  $r_{\text{Airy}} = 7,66 \text{ mm}$ .

5. Déterminer le rayon  $\rho$  de l'ouverture circulaire ?
6. Déterminer le diamètre  $d_3$  du troisième anneau brillant.

p	$\pm 3/2$	$\pm 5/2$	$\pm 7/2$	p	$\pm 1$	$\pm 2$	$\pm 3$
$m_p$	$\pm 3,83$	$\pm 7,02$	$\pm 10,17$	m	$\pm 5,14$	$\pm 8,46$	$\pm 11,62$
$(I/I_0)_{\min}$	0			$10^{-2} \times (I/I_0)_{\max}$	1,75	0,42	0,16

### EXERCICE 3 : réseau à N fentes fines 6 points

On considère un réseau à fentes comportant  $500 \text{ traits/mm}$ , éclairée par une source dichromatique de longueurs d'onde  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ . L'onde incidente est normale au plan des fentes.

1. Donner l'expression littérale qui permet d'obtenir le nombre maximal d'ordres qu'il est possible d'observer pour une radiation de longueur d'onde  $\lambda$ .
2. Evaluer ce nombre pour  $\lambda_1 = 450 \text{ nm}$  et pour  $\lambda_2 = 750 \text{ nm}$ .
3. Justifier ces résultats en dressant un tableau de  $\sin \theta$  pour ces deux longueurs d'onde.
4. Donner un schéma montrant l'ordre d'apparition des raies à partir de la raie centrale en utilisant leur code b et r (comme bleu et rouge !).

EXAMEN FINAL. Durée 1 heure 30 minutes.

Nous considérons le montage expérimental constitué d'une lentille mince plan convexe, d'indice  $n = 3/2$  et de distance focale  $f = 20 \text{ m}$ , maintenue en contact au niveau de son sommet  $S$  avec une lame à faces parallèles de même indice  $n = 3/2$  (voir figure 1). Le dispositif est éclairé en incidence normale par un faisceau de lumière parallèle de polarisation transverse électrique ( $TE$ ) et de longueur d'onde  $\lambda = 632.8 \text{ nm}$  provenant d'une source laser Hélium-Néon. *Nous nous intéressons à la figure d'interférences obtenue après transmission.*

Partie A : Calcul des coefficients de Fresnel. (3 points)

Les coefficients de réflexion  $r$  et de transmission  $t$  pour la polarisation ( $TE$ ) sont donnés par :

$$r = \frac{n_i \cos \theta_i - n_t \cos \theta_t}{n_i \cos \theta_i + n_t \cos \theta_t} \text{ et } t = \frac{2n_i \cos \theta_i}{n_i \cos \theta_i + n_t \cos \theta_t}, \text{ où } i \text{ et } t \text{ sont des indices qui désignent}$$

respectivement incident (dans le milieu d'entrée) et transmis (dans le milieu de sortie). Nous nous intéressons au voisinage immédiat du centre de la figure de sorte que *les incidences puissent être considérées comme quasi normales.*

- 1) Calculer les coefficients de réflexion  $r_1$  et de transmission  $t_1$  du dioptré  $D_1$  verre/air.
- 2) Calculer les coefficients de réflexion  $r_2$  et de transmission  $t_2$  du dioptré  $D_2$  air/verre.
- 3) Calculer les pouvoirs de réflexion  $R_{CA}$  et de transmission  $T_{CA}$  de *la lame d'air prismatique.*

Partie B : Questions de cours. (7 points)

- 4) Quelle est *la partie du dispositif* qui est à l'origine du phénomène d'interférences? La figure d'interférences est elle *localisée* ou *délocalisée*? Justifier chaque réponse *par une phrase.*
- 5) Indiquer sur le dispositif le lieu d'apparition des *franges d'interférences par réflexion* et *par transmission*. Les franges obtenues sont elles des franges d'*Haidinger* ou de *Fizeau*?
- 6) Donner, *en deux lignes*, les *deux différences* qui distinguent les figures d'interférences obtenues *par réflexion* et *par transmission.*
- 7) Donner les *ordres de grandeur* du rayon de la face courbe de la lentille  $R$ , de la distance  $SM$  entre le sommet de la lentille et le point d'observation  $M$  et de l'épaisseur  $e(x)$  du coin d'air.
- 8) Exprimer en fonction de la distance focale  $f$  et de l'indice  $n$ , l'épaisseur  $e(x)$  du coin d'air en un point  $M$  dont la distance par rapport à l'axe du dispositif est  $SM = x$ .



9) Montrer que la *différence de marche* entre deux rayons voisins transmis par le coin d'air est *purement géométrique* et qu'elle est égale à  $\delta(x) = 2e(x)$ .

**Partie C : Calcul de l'intensité transmise. (4 points)**

10) Soit un rayon incident d'amplitude  $a$ , donner les amplitudes des deux premiers rayons transmis en fonction du coefficient de réflexion  $r_2$  et des coefficients de transmission  $t_1$  et  $t_2$  des dioptries  $D_1$  verre/air et  $D_2$  air/verre (voir figure 2).

11) En considérant uniquement les deux premiers rayons transmis et en posant  $r_2^2 = R_{CA}$  et  $t_1 t_2 = T_{CA}$ , montrer que la vibration totale transmise en  $x$  a pour expression :  $\bar{s} = a T_{CA} e^{j\omega t} [1 + R_{CA} e^{-j\varphi}]$ .

12) Montrer que l'intensité transmise  $I_T$  a pour expression :  $I_T = I_0 (1 + m \cos^2(\varphi/2))$ , où  $I_0$  et  $m$  sont à déterminer.

**Partie D : Etude de la figure d'interférences par transmission. (6 points)**

13) Calculer les valeurs maximale et minimale de l'intensité transmise  $I_T$ .

14) Sachant que l'ordre d'interférences  $p$  est égal à  $\delta/\lambda$ , exprimer  $I_T$  en fonction de  $p$ .

15) Montrer que les anneaux brillants correspondent à un ordre  $p$  entier. Donner l'expression  $x_B$  des rayons des anneaux brillants.

16) Montrer que les anneaux sombres correspondent à un ordre  $p$  demi entier. Donner l'expression  $x_S$  des rayons des anneaux sombres.

17) Déterminer le contraste  $\Gamma$  de la figure d'interférences.

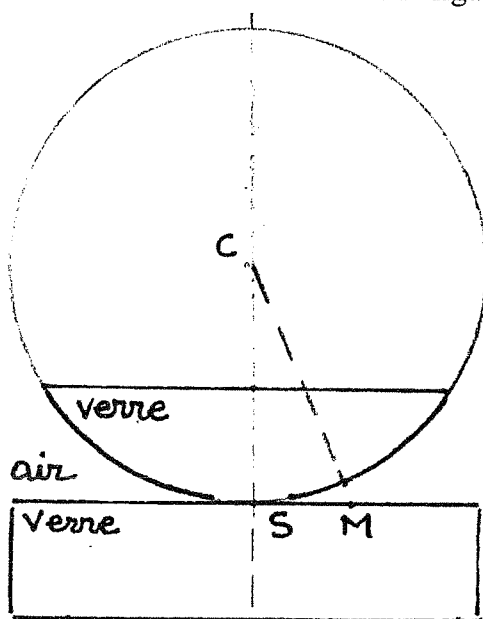


Figure 1.

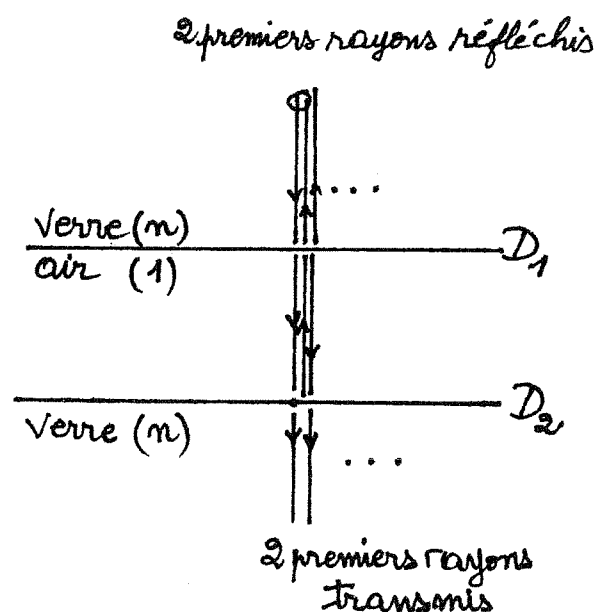


Figure 2.

EXAMEN FINAL  
(Durée 1 heure 30 minutes)

Recommandations :

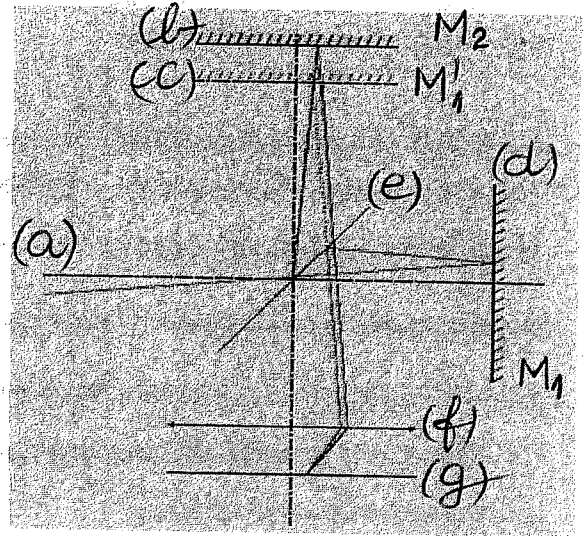
- Une grande importance est accordée à la bonne rédaction et à la propreté de la copie.
- Les résultats sous forme d'expressions littérales doivent être encadrés.

INTERFEROMETRE DE MICHELSON

Partie A: Questions de cours. (5 points)

Soit le dispositif interférentiel de Michelson ci contre :

- 1) Donner les **noms** et les **rôles** des éléments a, b, c, d, e, f et g. (*Une phrase par élément*).
- 2) Quel est le **nombre d'ondes** qui interfèrent dans ce dispositif? Où se forment les franges d'interférences?
- 3) Quelle est la **partie du dispositif responsable** du phénomène d'interférences? Quelle est la **géométrie des franges** obtenues?
- 4) Donner les expressions de la **différence de marche**  $\delta_0(e, i)$  et de **l'ordre d'interférences**  $p_0(e, i)$  en fonction de l'épaisseur  $e$  et de l'angle d'incidence  $i$ . En déduire la différence de marche  $\delta_0(i = 0)$  et l'ordre d'interférences  $p_0(i = 0)$  au centre de la figure d'interférences.
- 5) Les franges obtenues sont dites d'égale ....



Partie B: Calcul de l'intensité lumineuse des franges d'interférences. (7 points)

- 6) Exprimer la différence de chemins optiques  $\delta_0(e, i)$  entre les deux rayons qui interfèrent au point  $M$  en fonction des points  $A, I, J'_1, H, K_1, L_1, M$  et  $A, I, J'_1, J_2, J_3, K_2, L_2, M$  (*faire un dessin*).
- Nous considérons que la lame séparatrice est réduite à sa face réfléchissante ayant pour coefficient de réflexion  $r$  et pour coefficient de transmission  $t$ . Nous supposons aussi qu'elle ne contribue par aucune différence de marche supplémentaire.
- 7) Donner les amplitudes des deux rayons qui interfèrent au point  $M$ .
  - 8) Choisir une origine des phases adéquate puis donner les expressions des vibrations qui interfèrent au point  $M$ .
  - 9) Donner l'expression de la vibration totale au point  $M$ . En déduire l'intensité lumineuse au point  $M$ .

**Partie C: Mesure de l'indice de réfraction d'une substance chimique transparente. (4 points)**

Nous mettons sur le trajet du rayon optique se dirigeant vers  $M_1$  une lame transparente d'épaisseur  $l$  d'une substance chimique d'indice  $n$ . Cette lame introduit un chemin supplémentaire égal à  $l(n \cos(r) - \cos(i))$  au rayon qui la traverse.

- 10) Exprimer alors la nouvelle différence de marche  $\delta(e, i)$  en fonction de  $\delta_0(e, i)$ ,  $n$  et  $l$ .
- 11) Dédurre l'expression du nouveau ordre d'interférences  $p(e, i)$  en fonction de  $p_0(e, i)$ ,  $n$  et  $l$ .
- 12) Des anneaux vont-ils apparaître ou disparaître au centre de la figure d'interférences? Justifier votre réponse. Exprimer l'indice de réfraction de la substance en fonction du nombre  $N$  d'anneaux qui défilent au centre de la figure.

**Partie D: Interféromètre de Michelson dans la configuration coin d'air. (4 points)**

Dans cette partie, la source émet un faisceau de lumière parallèle dont l'angle d'incidence  $i$  est nul. Nous retirons la lame transparente de la substance chimique. Nous faisons descendre le miroir  $M_2$  jusqu'à ce qu'il coïncide avec le miroir virtuel  $M_1'$  de sorte que l'épaisseur de la lame d'air à faces parallèle  $e$  soit nulle. Puis, nous effectuons une rotation du miroir  $M_2$ .

- 13) Quelle est la **partie du dispositif responsable** du phénomène d'interférences? Quelle est la **géométrie des franges** obtenues?
- 14) Les franges obtenues sont dites d'égale ....
- 15) Donner les expressions de la **différence de marche**  $\delta$  et de **l'ordre d'interférences**  $p$  en fonction des données du problème à préciser.

EXAMEN d'OPTIQUE ONDULATOIRE 2013-2014

Exercice 1 : Question de cours [6 points]

En se basant sur le schéma géométrique ci-contre (figure 1). Déterminer la différence de marche (ddm)  $\delta$  entre les deux vibrations monochromatiques  $s_1$  et  $s_2$  de longueur d'onde  $\lambda$ , réfléchies consécutivement par une lame de verre à faces parallèles d'épaisseur  $e$  et d'indice  $n$ . On compte les angles en valeur absolue.

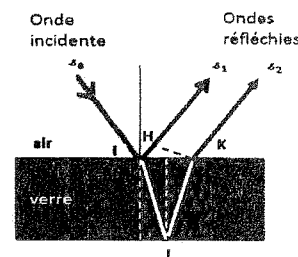


Figure 1

Exercice 2

Soit le dispositif interférentiel de Newton (figure 2) constitué d'une lentille mince plan convexe (LMPC) d'ouverture  $\rho = 3\text{cm}$  et de rayon de courbure  $R$ , d'indice  $n = 1.5$  et de distance focale  $f = 16\text{m}$ , maintenue en contact au niveau de son sommet  $S$  avec une lame à faces parallèles (LAFP) de même indice  $n$ . Le dispositif est éclairé en incidence normale par un faisceau de lumière parallèle de longueur d'onde  $\lambda = 6817,9\text{\AA}$  provenant d'une source laser.

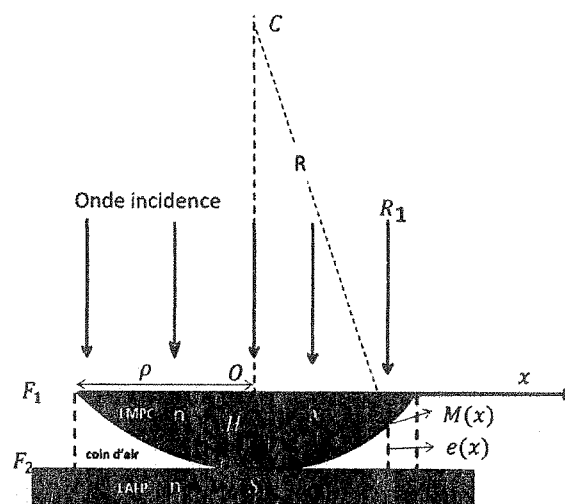


Figure 2

Nous nous intéressons à la figure d'interférences obtenue après transmission.

Partie A [7 points]

- 1) Quelle est la partie du dispositif qui est à l'origine du phénomène d'interférences, est ce que c'est la (LMPC), le coin d'air ou la (LAFP)?
- 2) Justifier que la différence de marche entre deux rayons voisins transmis est purement géométrique :  $\delta = 2e$ .
- 3) Allons-nous obtenir des anneaux d'égale inclinaison ou d'égale épaisseur ? Où sont-ils localisés ?
- 4) les conditions suivantes sont-elles vérifiées ?

$$\rho \ll R \quad \text{et} \quad e(x) \ll R$$

- 5) Dans ces conditions, exprimer l'épaisseur  $e(x)$  du coin d'air en tout point  $M(x)$  en fonction de la distance focale  $f$ , de l'indice  $n$  et de la distance  $x = HM$  par rapport à l'axe OS. En déduire  $\delta = F(x, n, f)$  ( $F \Rightarrow$  en fonction de)

**Partie B** [7 points]

Nous pouvons montrer que pour un rayon incident d'amplitude  $a$ , l'intensité transmise  $I_T$  a pour expression :  $I_T = I_0 / (1 + m \sin^2(\varphi/2))$  où  $m = 4R_v / (1 - R_v)^2$  et  $\varphi = 2\pi\delta/\lambda$ ,  $R_v$  étant le pouvoir de réflexion du verre.

- 1) Exprimer  $I_T$  en fonction de l'ordre d'interférences  $p$ . En déduire que les anneaux brillants correspondent à un ordre entier relatif et que les anneaux sombres correspondent à un ordre  $p$  demi entier relatif.
- 2) La tâche centrale est-elle sombre ou brillante? Justifier votre réponse.
- 3) Donner l'expression des rayons  $x_p$  des anneaux d'ordre  $p$  en déduire les rayons  $x_{kb}$  des anneaux brillants et les rayons  $x_{ks}$  des anneaux sombres.
- 4) Calculer le rayons  $x_{30s}$  du trentième anneau sombre et le rayon  $x_{20b}$  et du vingtième anneau brillant.
- 5) L'anneau de plus grand rayon que nous pouvons observer est-il sombre ou brillant ?
- 6) Combien d'anneaux brillants pouvons-nous observer dans l'ensemble par transmission ?
- 7) Quel paramètre doit-on augmenter pour rendre plus nette la figure d'interférences ? Justifier votre réponse

**Rappel**

Formule de Gullstrand d'une lentille mince:

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left( \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right)$$



EXAMEN DE RATTRAPAGE  
(durée 1 heure 30 minutes)

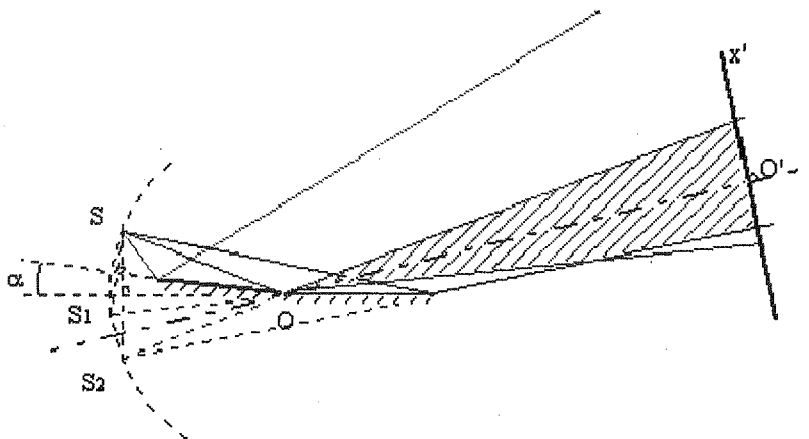
Recommandations :

- Une grande importance est accordée à la bonne rédaction et à la propreté de la copie.
- Les expressions littérales, les résultats du calcul numérique doivent être encadrés.

\*CLUB NAJAH\*  
UCD.FS.ELJADIDA  
LE PRESIDENT

EXERCICE 1 : MIROIRS DE FRESNEL

Soient deux miroirs métalliques en contact au point  $O$ , qui font entre eux un très petit angle  $\alpha = 10'$ . Le miroir de droite est placé sur l'axe  $Ox$ . Les deux miroirs sont éclairés par une source ponctuelle  $S$  émettant une lumière monochromatique de longueur d'onde  $\lambda = 632.8nm$  placée à la distance  $R = 1m$  et telle que l'angle  $\theta$  entre  $(OS)$  et l'axe  $Ox$  est égal à quelques degrés. Un écran  $E$  est placé ensuite à la distance  $D = 1m$  de  $O$ . L'écran est normal en  $O'$  à la bissectrice de l'angle  $S_1\hat{O}S_2$  (voir la figure). Nous notons  $M(D, x')$  un point de cet écran.



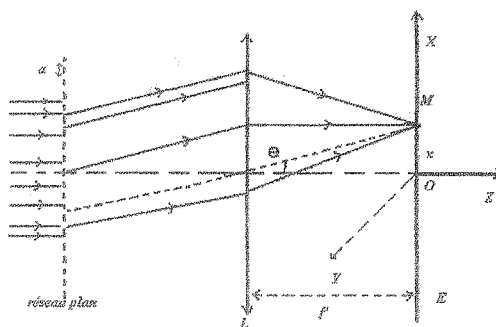
- Pourquoi  $\theta$  doit il être supérieur à  $\alpha$ ? (*Répondre par une phrase*)
  - Quelle est la couleur de la lumière utilisée?
- Montrer que ce système est équivalent à un ensemble de deux sources secondaires  $S_1$  et  $S_2$  (*Répondre par une phrase*).
  - Quelle est la nature de ces sources?
  - Donner les positions angulaires de ces deux sources.
- Quel est l'ouverture angulaire entre les deux sources secondaires?
- Indiquer sur la figure la position de la frange centrale.
  - Quelle est la nature de cette frange? Est elle sombre ou brillante?
- Exprimer l'interfrange  $i$  en fonction des données du problème.
  - Calculer  $i$ .
- Donner l'ouverture angulaire du champ d'interférences.



EXAMEN D'OPTIQUE 2 (SMP3)

Exercice 1 : Diffraction par un réseau plan

On considère un réseau plan constitué de  $N$  fentes (horizontales et perpendiculaires au plan de la figure), identiques. Ces fentes sont de largeur  $l$ , et leurs centres sont équidistants de  $a$ . On éclaire ce réseau par une onde plane monochromatique de longueur d'onde  $\lambda = 633 \text{ nm}$ , en incidence normale (voir schéma ci-dessous). On explore le champ d'interférence dans le plan focal  $xOy$  d'une lentille convergente  $L$  de distance focale  $f' = 10 \text{ cm}$  et de foyer image  $O$ , au point  $M(x, y)$  d'abscisse  $x$  tel que  $|x| \ll f'$ .



\*CLUB NAJAH\*  
UCD.FS.ELJADIDA  
LE PRÉSIDENT

1) On montre que l'amplitude  $A$  diffractée par chacune des fentes au point  $M$  dans la direction

$\theta$  peut s'écrire  $A = a_0 \cdot \left( \frac{\sin u}{u} \right)$ . Donner (sans démonstration) l'expression de  $u$  en fonction de  $\lambda$ ,  $l$  et  $\theta$ .

2) Montrer que l'amplitude totale  $A_N$  diffractée par le réseau de  $N$  fentes, au point  $M$  s'écrit

$$A_N = N a_0 \cdot \left( \frac{\sin u}{u} \right) \cdot \left( \frac{\sin N \frac{\phi}{2}}{N \sin \frac{\phi}{2}} \right), \text{ où } \phi \text{ est un déphasage, } \phi = \frac{2\pi}{\lambda} a \cdot \theta.$$

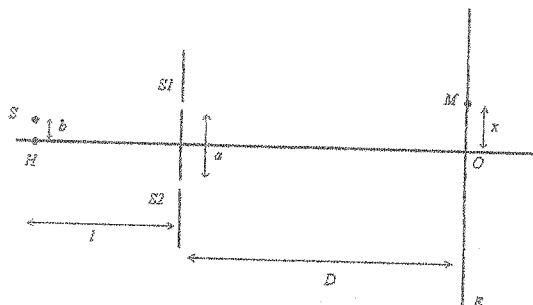
3) En déduire l'expression de l'intensité  $I_N$  totale diffractée au point  $M$ . Que devient cette expression dans le cas d'un réseau parfait à fentes infiniment fines (*c.à.d*  $l \rightarrow 0$ )?

4) Tracer dans ce cas ( $l \rightarrow 0$ ) le graphe de l'intensité normalisée en fonction de  $x$ . Déterminer les positions  $x_m$  correspondantes aux maximums principaux d'ordre  $m$  des taches de diffraction.

5) Sachant que le maximum d'ordre 2 est observé à  $x_2 = 7.2 \text{ cm}$ , déterminer  $a$ .

Exercice 2 : Interféromètre de Michelson -Pease

A) On considère une étoile, assimilée ici à une source ponctuelle monochromatique  $S$  de longueur d'onde  $\lambda$ , éclairant un dispositif de fente de Young.  $S$  est à une distance  $b$  de l'axe de fentes (voir figure ci-dessous). On repère la position d'un point  $M$  sur l'écran  $E$  par  $\overline{OM} = x$ , et on suppose  $|x| \ll D$ ,  $a \ll D$ ,  $a \ll l$ ,  $b \ll l$ .



1) Soit  $\delta$  la différence de chemin optique entre deux rayons qui interfèrent au point  $M$ ,

$$\delta = (SS_2 + S_2M) - (SS_1 + S_1M), \text{ montrer que } \delta = \frac{ax}{D} + \frac{ab}{l}.$$

2) Soit  $I_1(x)$  l'intensité de l'éclairement créée par  $S$  sur l'écran  $E$ ,  $I_1(x) = 2I_0(1 + \cos(\phi))$

Donner l'expression de  $\phi$ . Décrire la figure d'interférence observée ? Déterminer les positions des franges brillantes et sombres ainsi que l'interfrange  $i$ .

B) Soit une deuxième étoile très voisine de ( $S$ ) et qu'on assimile à une source ponctuelle  $S'$ , placée symétriquement par rapport à  $S$  à l'axe du dispositif,  $\overline{HS} = -\overline{HS'}$ . On suppose que  $S$  et  $S'$  sont incohérentes. Soit  $I_2(x)$  l'éclairement au point  $M$  créée par  $S'$ .

3) L'intensité totale reçue au point  $M$  sur l'écran s'écrit  $I(x) = I_1(x) + I_2(x)$ . Montrer que

$$I(x) = 4I_0 \left( 1 + V \cdot \cos\left(\frac{2\pi ax}{\lambda D}\right) \right), \text{ où } V \text{ est le facteur de visibilité, } V = \cos\left(\frac{2\pi ab}{\lambda l}\right).$$

(On pourra utiliser la relation mathématique suivante :  $\cos(p) + \cos(q) = 2 \cdot \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$ ).

4) Déterminer les intensités Maximale  $I_{\max}$  et minimale  $I_{\min}$  en fonction de  $a$ ,  $\lambda$  et la distance angulaire  $\alpha = \frac{2b}{l}$ .

5) On imagine qu'un dispositif adapté permet de faire varier  $a$ , les paramètres  $\lambda$  et  $\alpha$  sont supposés fixes. Tracer  $V$  en fonction  $a$ . Montrer que les franges d'interférences disparaissent pour certaines valeurs de  $a$ .

6) Soit  $a_1 = 52 \text{ mm}$  la plus petite distance pour la quelle les franges disparaissent, déterminer alors la distance angulaire  $\alpha$  entre les deux étoiles ( $S$ ) et ( $S'$ ). On donne  $\lambda = 0.6 \mu\text{m}$ .

Examen de rattrapage d'optique 2 -SMP3 (1H30min)

Exercice 1: Interférences de Newton

Une lentille mince plan-convexe de verre d'indice  $n=1.5$  et de rayon  $r$ , repose par sa surface sphérique sur une lame de verre horizontale de même indice  $n$ . Ce système constitue un coin d'air, et il est éclairé par une lumière monochromatique  $\lambda=0.546\mu\text{m}$ . On étudie le phénomène d'interférence en incidence normale (produit par des rayons tombant normalement à la lame de verre horizontale) sur le coin d'air. Soient  $R_1$  et  $R_2$  deux rayons réfléchis produits par un rayon  $R$  sur le coin d'air (voir schéma 1). Les deux rayons  $R_1$  et  $R_2$  sont confondus avec la direction de  $R$ . On supposera  $R_1$  et  $R_2$  ont la même intensité  $I_0$  et on admettra l'approximation  $e=\frac{x^2}{2r}$ .

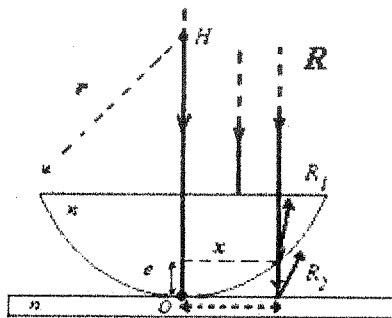


Schéma 1

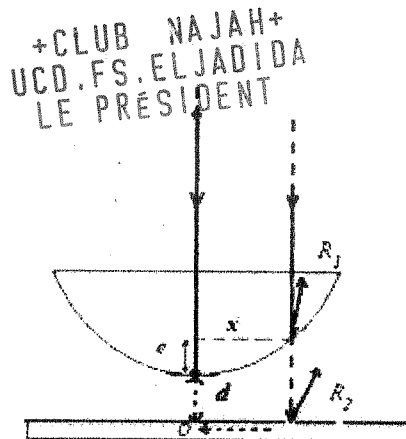


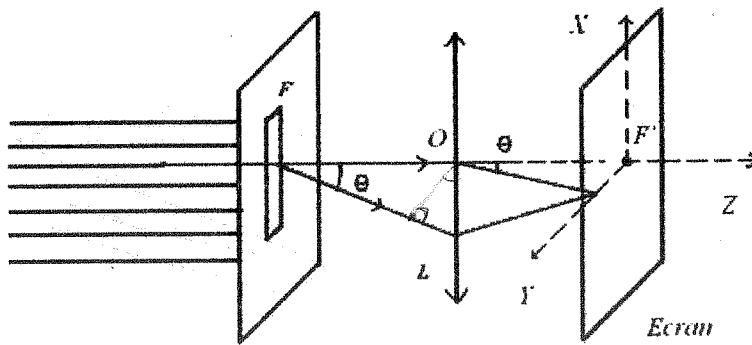
Schéma 2

- 1) Montrer que la différence de marche entre  $R_1$  et  $R_2$  situés à la distance  $x$  par rapport à l'axe de symétrie  $OH$  du système s'écrit  $\delta = \frac{x^2}{r} + \frac{\lambda}{2}$ .
- 2) Donner l'expression de l'intensité de la figure d'interférence  $I = I(\delta)$ . Tracer  $I = I(\delta)$
- 3) Montrer que les franges d'interférence sont des anneaux concentriques.
- 4) Donner l'ordre d'interférence  $p(x)$ . En déduire les expressions des rayons des anneaux brillants  $X_n^b$  et sombres  $X_n^s$ . La frange au centre est-elle brillante ou sombre ?
- 5) On constate que le rayon du 10<sup>ème</sup> anneaux brillant  $X_n^b = 2\text{ mm}$ , déterminer alors le rayon  $r$  de la lentille sphérique.

6) On translate la lentille sphérique en la déplaçant verticalement vers le haut à une distance  $d$  (voir schéma 2). On constate que les anneaux d'interférence convergent vers le centre. Donner l'expression du nouvel ordre d'interférence  $p'$  et expliquer les modifications observées sur la figure d'interférence au cours de ce déplacement.

### Exercice 2 : Diffraction par deux fentes rectangulaires

On éclaire une fente  $F$  verticale par une onde plane monochromatique de longueur d'onde  $\lambda = 546 \text{ nm}$  en incidence normale. La longueur de la fente est supposée très grande par rapport à sa largeur  $a$ . Une lentille convergente  $L$  de distance focale  $f' = 1 \text{ m}$  permet d'observer dans son plan focal image la figure de diffraction à l'infini produite par  $F$ . L'écran ( $E$ ) est placé dans ce plan focal (voir schéma ci-dessous).



A-1) Démontrer que, dans une direction du plan horizontal faisant avec l'axe optique un petit angle  $\theta$ , l'intensité de la vibration résultante est  $I(\theta) = I_0 \left( \frac{\sin u}{u} \right)^2$  avec  $u = \frac{\pi a \theta}{\lambda}$  et  $\theta = \frac{y}{f'}$ .

$I_0$  étant l'intensité résultante pour  $\theta = 0$ .

2) Tracer  $I = I(y)$ . Décrire la figure de diffraction observée. Donner l'expression de la largeur  $\Delta$  de la tache centrale de la figure de diffraction en fonction de  $\lambda$ ,  $f'$  et  $a$ ?

3) Déterminer  $a$  lorsque  $\Delta = 4.3 \text{ mm}$ .

B) On remplace  $F$  par deux fentes (verticales) parallèles identiques  $F_1$  et  $F_2$  de largeur  $a$  et dont leurs centres sont distants de  $l$ .

4) Démontrer que l'intensité  $I'(\theta)$  dans la direction  $\theta$  s'écrit  $I'(\theta) = I'_0 \left( \frac{\sin u}{u} \right)^2 \cos^2 \left( \frac{\varphi}{2} \right)$ ,

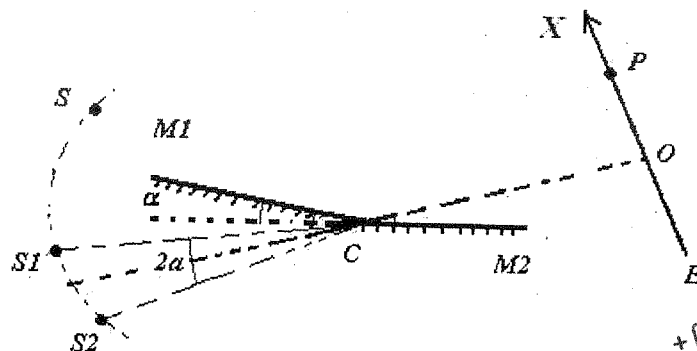
où  $\varphi$  est une différence de phase à déterminer.

5) Tracer  $I'(y)$ . Décrire la tache centrale obtenue lorsque  $l = 4a$ . Donner l'expression de la distance  $l$  en fonction de l'interfrange des franges d'interférence  $i$ ,  $\lambda$  et  $f'$ .

Exercice I : Miroirs de Fresnel

On considère deux miroirs plans adjacents  $M_1$  et  $M_2$  faisant entre eux un angle  $\alpha$  petit et une source ponctuelle monochromatique  $S$  de la longueur d'onde  $\lambda = 0.546 \mu\text{m}$ . Chacun des miroirs donne de la source  $S$  une image virtuelle (soient  $S_1$  et  $S_2$ ) (voir figure ci-dessous). On désigne respectivement par  $a$  la distance de l'arête à la source  $S$  ( $a = CS$ ) et  $b$  la distance à l'écran d'observation ( $E$ ), soit  $b = CO$ . L'écran  $E$  est placé perpendiculairement à la bissectrice de  $(CS_1, CS_2)$  (et parallèlement à  $S_1S_2$ ). On admet que  $S, S_1$  et  $S_2$  sont situés sur un cercle de centre  $C$  (arête des deux miroirs) et que l'angle  $(CS_1, CS_2) = 2\alpha$ .

On donne,  $a = b = 1 \text{ m}$  et  $\alpha = 3 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$ .



+CLUB NAJAH+  
UCD.FS.ELJADIDA  
LE PRÉSIDENT

- 1) Déterminer la région de l'espace où on peut observer des interférences entre les faisceaux réfléchis par  $M_1$  et  $M_2$ .
- 2) Montrer que l'ordre d'interférence  $p(x)$  en un point  $P$  ( $\overline{OP} = x$ ) de ( $E$ ) s'écrit
 
$$p(x) = \frac{2\alpha \cdot a \cdot x}{\lambda(a+b)}$$
- 3) Donner l'expression de l'intensité  $I$  sur l'écran  $E$ . Décrire la figure d'interférence obtenue sur ( $E$ ). Déterminer la position de la frange centrale et calculer l'interfrange  $i$ .
- 4) Tracer  $I = I(x)$ .
- 5) Calculer la largeur  $L$  de la zone d'interférence sur ( $E$ ).
- 6) Calculer le nombre de franges brillantes ainsi que le nombre de franges sombres qui existent dans la zone d'interférence.

## Exercice II : Double fente rectangulaire

Un faisceau de lumière parallèle monochromatique de longueur d'onde  $\lambda = 0.55 \mu\text{m}$  éclaire en incidence normale un écran opaque percé de deux fentes  $F_1$  et  $F_2$  parallèles identiques de largeur  $l$  suivant l'axe  $OY$  ; la distance entre les deux fentes est  $a = F_1F_2$  ( $a > l$ ).

Dans le plan focal  $XOY$  (écran  $E$ ) d'une lentille convergente  $L$  de distance focale  $f' = 2 \text{ m}$  et de foyer  $O$ , on étudie le champ d'interférence aux points  $M(y)$  d'abscisse  $y$  tel que  $y \ll f'$ .

On admet que, dans une direction du plan horizontal faisant avec l'axe optique  $OZ$  un petit angle  $\theta$  tel que  $\theta = \frac{y}{f'}$ , l'amplitude de la vibration diffractée par une seule fente est

$$A(\theta) = A_0 \cdot \left( \frac{\sin\left(\frac{\pi \cdot l \cdot \theta}{\lambda}\right)}{\frac{\pi \cdot l \cdot \theta}{\lambda}} \right) \cdot A_0 \text{ étant l'amplitude résultante pour } \theta = 0.$$

- 1) Déterminer l'amplitude totale  $A_t(\theta)$  due à la double fente de Young ( $F_1$  et  $F_2$ ) au point  $M$ .
- 2) Montrer la répartition de l'intensité totale  $I_t(y)$  au point  $M(y)$  sur ( $E$ ) s'écrit

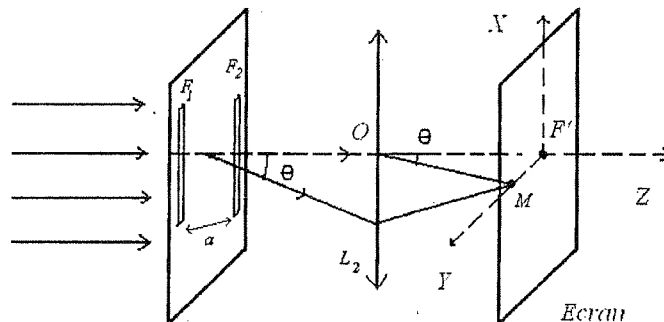
$$I_t(y) = I_0 \left( \frac{\sin\left(\frac{\pi \cdot y}{i}\right)}{\frac{\pi \cdot y}{i}} \right)^2 \cdot \left[ \cos\left(\frac{\pi \cdot y}{i'}\right) \right]^2. \text{ Définir les grandeurs } i \text{ et } i'.$$

- 3) On constate que la 4<sup>ème</sup> frange brillante d'interférence, comptée à partir de la tache centrale est supprimée ( $I=0$ ) à cause de la tache de diffraction. La distance entre deux maxima consécutifs (franges d'interférence) est 1mm.

a) Tracer le graphique de  $I_t(y)$  dans l'intervalle  $-2i < y < 2i$ .

b) Déterminer  $a$ ,  $l$  et le nombre de franges brillantes dans la tache de diffraction.

- 4) Qu'observe-t-on sur le graphe si on diminue l'écartement  $a$  des deux fentes  $F_1$  et  $F_2$  sans modifier  $l$  ? Que devient l'expression de  $I_t(y)$  lorsque  $a$  tend vers 0.





## Optique II - Session de rattrapage -

### Exercice 1

Un interféromètre Fabry-Pérot (F.P) est constitué d'une lame d'air d'épaisseur  $e$  comprise entre deux lames de verre d'épaisseur négligeable (fig. 1), dont les faces en regard planes et parallèles ont été rendues très réfléchissantes. On désignera par  $R$  et  $T$  les pouvoirs de réflexion, de transmission en intensité de chacune des deux lames du F.P. On éclaire le F.P par une source étendue monochromatique de longueur d'onde  $\lambda = 0,592 \mu\text{m}$  dans le vide. On donne  $e = 0,444 \text{ mm}$ ,  $R = 0,88$  avec  $R + T = 1$ .

1) Calculer le déphasage  $\varphi$  entre les deux ondes ① et ② transmises consécutivement dans la direction faisant le petit angle  $i$  avec la normale aux lames (fig.1). Donner l'expression de l'ordre  $p$  des franges et sa valeur au centre de l'écran en déduire la nature de la frange centrale.

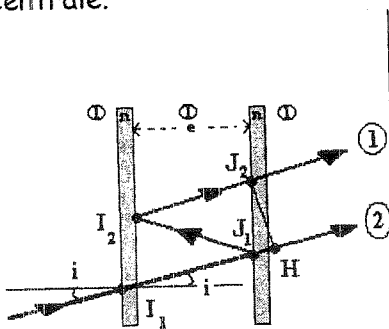


Figure 1: différence de marche

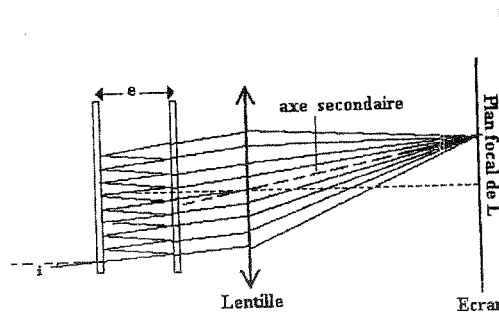


Figure 2 : Interférence par division d'amplitude

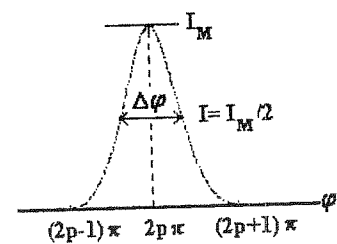


Figure 3: Largeur à mi-hauteur d'une frange brillante.

2) On cherche à calculer l'intensité des franges sur l'écran E (fig.2) dans la direction  $i$ . Soit  $a$  l'amplitude de l'onde incidente (on posera  $I_0 = a^2$ ),  $r$  et  $t$  les facteurs de réflexion et de transmission pour l'amplitude de chaque lame et  $\varphi_0$  la phase de la première vibration transmise  $s_1$  par la lame d'air. Pour cela remplir un tableau donnant les déphasages et les amplitudes réelles de  $N$  vibrations transmises après  $N$  réflexions multiples. Calculer l'amplitude complexe  $\bar{A}(\varphi_0, \varphi, a, R, T)$  et en fin calculer l'intensité en fonction de  $I_0, R, \varphi$  et

$$m = \frac{4R}{(1-R)^2}.$$

3) Calculer les intensités  $I_{\max}$  dans la direction des franges brillantes et  $I_{\min}$  dans la direction des franges sombres : en fonction de  $R, T$  et  $I_0$  et en % de  $I_0$ . En déduire le contraste des franges  $\Gamma = (I_M - I_m) / (I_M + I_m)$  en fonction de  $R$ , puis numériquement.

4) En utilisant la fig. 3 calculer le coefficient de finesse  $F$  des franges en fonction de  $R$ . Donner sa valeur numérique.

+CLUB NAJAH+  
UCD.FS.ELJADIDA  
LE PRÉSIDENT

## Exercice 2

Soit une ouverture circulaire ayant un rayon  $R=514\mu\text{m}$  et étant éclairée par un laser de longueur d'onde  $\lambda = 0.514\mu\text{m}$

- a) On obtient le phénomène de diffraction. Qu'est ce qu'on observe sur le plan focal d'une lentille L de distance focale  $f=10.5\text{cm}$ . ?

On rappelle que l'intensité de diffraction par un trou circulaire est donnée par :

$$I = I_0 \cdot \left( \frac{J_1(m)}{m} \right)^2$$

- b) Définir la direction  $\theta$  des taches de diffraction. Quel est le rayon  $r$  de la tache d'Airy (tache centrale de diffraction)?

On utilise le tableau suivant donnant les valeurs numériques de  $m$ , de  $I_{\text{max}}$  et  $I_{\text{min}}$ .

$m$	$\pm 3,83$	$\pm 7,02$	$\pm 10,17$
$I_{\text{min}}$	0		
$m$	$\pm 5,14$	$\pm 8,46$	$\pm 11,62$
$I_{\text{max}}$	$0,0175I_0$	$0,0042I_0$	$0,0016I_0$

## EXAMEN D'OPTIQUE PHYSIQUE

Durée 2heures

### EXERCICE 1: FENTES D'YOUNG.

On considère un dispositif de fentes d'Young  $S_1$  et  $S_2$  séparées d'une distance  $S_1S_2=a=2\text{mm}$ . Le système est éclairé par une source  $S$  très fine émettant une lumière monochromatique de longueur d'onde  $\lambda=632\text{nm}$ .

1) Décrire la figure d'interférence obtenue sur un écran d'observation  $E$  placé à la distance  $D=1\text{m}$  des fentes. De quel type d'interférence s'agit-il ? Calculer théoriquement la différence de marche  $\delta$  et numériquement l'interfrange  $i$ .

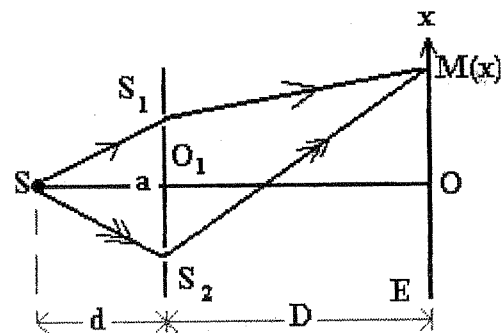


Figure H.1

- 2) On place devant la fente  $S_1$  une cuve de longueur  $e$  contenant une substance d'indice  $n$ . Calculer la nouvelle différence de marche en précisant le supplément introduit par la présence de la cuve. Déterminer la nouvelle position de la frange centrale. Conclure.
- 3) Après avoir enlevé la cuve, on déplace légèrement la source  $S$  en  $S'$  d'une quantité  $x' = SS'$  perpendiculairement à l'axe  $SO$ .

- Déterminer la nouvelle différence de marche en tout point  $M$  de  $E$ .
- Que se passe-t-il à nouveau sur la figure d'interférence ?
- Déterminer la nouvelle position de la frange centrale.
- Calculer la nouvelle interfrange.
- Qu'observe-t-on sur  $E$  si nous avons deux sources ponctuelles en  $S$  et en  $S'$ .
- Que peut on dire dans le cas particulier ou  $x' = \frac{\lambda D}{2a}$ .

## EXERCICE 2 : DIFFRACTION PAR UN RÉSEAU

Un réseau comportant **400** traits par millimètre est éclairé par un faisceau cylindrique sous incidence normale. La lumière est monochromatique, de longueur d'onde  $\lambda_0 = 546,1 \text{ nm}$ .

1. Calculer le pas du réseau.
2. Calculer les directions  $\theta$  pour lesquelles l'intensité est maximum.
3. On observe le faisceau diffracté avec une lunette réglée sur l'infini. La lunette vise au départ l'ordre 0. De quel angle faut-il la faire tourner pour viser l'image correspondant au maximum d'ordre 4 ?
4. Dans une deuxième expérience, le faisceau incident est composé de 2 longueurs d'ondes  $\lambda_1 = 450 \text{ nm}$  et  $\lambda_2 = 750 \text{ nm}$ . Celui-ci arrive normalement sur le réseau. Les taches de diffraction sont localisées sur un écran disposé devant une lentille convergente de distance focale  $f=2\text{m}$ .

De quelle distance les raies correspondant aux deux radiations sont elles séparées?

- dans le second ordre.
- dans le quatrième ordre

Epreuve d'Optique Ondulatoire (Durée : 1 h 30')

**8 pts**

I- On considère un système interférentiel à deux ondes [Fig.1], constitué d'une lame de verre plane AB utilisée comme miroir plan, placée perpendiculairement à un écran  $\Sigma$ . Le système est éclairé par une source fente S parallèle à l'axe (B,Y) émettant une lumière monochromatique de longueur d'onde  $\lambda = 0.5 \mu\text{m}$ .

1-a) Préciser quelles sont les deux ondes donnant lieu au phénomène d'interférence que l'on peut observer.

Compléter le schéma en hachurant la zone d'interférences (ZI).

b) Quelle condition doit-on imposer sur la position de S pour que l'on puisse assimiler ce système à celui de deux sources fentes de Young S et S'? Déterminer la distance SS'. Quelle est la nature de S' ?

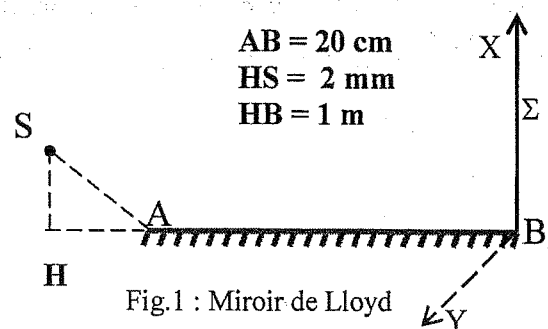


Fig.1 : Miroir de Lloyd

2-a) Donner la différence de marche et le déphasage entre les deux ondes en tout point M de (ZI).

b) Donner l'expression de l'intensité lumineuse I (X, Y) en un point M(X, Y) de (ZI). Quel est l'aspect des franges d'interférences ?

c) Que valent I(0,Y), et l'interfrange i ?

d) Déterminer le nombre de franges brillantes que l'on peut observer sur  $\Sigma$ . Quelle doit être la distance HA si l'on veut que l'interfrange i soit égale à 2mm ?

**7 pts**

II- On réalise des interférences lumineuses avec le dispositif de Newton schématisé sur [Fig. 2]. Ce dispositif est constitué d'une lentille plan-convexe (L), d'indice de réfraction  $n = 1,5$ . (L) est en contact ponctuel par sa face convexe, de rayon de courbure R, avec une lame de verre (P) à faces parallèles de même indice. La lame d'air d'épaisseur  $e(x)$  ainsi constituée ( $e(x) \ll R$ ) entre (L) et (P) est éclairée en incidence normale, par un faisceau de rayons parallèles. La source lumineuse est monochromatique de longueur d'onde  $\lambda$ . Les franges d'interférence sont observées par réflexion.

On admet que le phénomène d'interférence observé est essentiellement dû à l'onde directement réfléchiée par la face convexe de (L) ( $E_1 = E_i r_1$ ) et celle transmise par (L), réfléchiée par (P), puis re-transmise par (L) ( $E_2 = E_i t_1 r_2 t_2$ ) ; où  $E_i$  est l'amplitude de l'onde incidente,  $r_1 = -r_2 = (n-1)/(n+1)$ ,  $t_1 = 2n/(n+1)$  et  $t_2 = 2/(1+n)$ .

1) Justifier le fait que les contributions des ondes ayant subi plus d'une réflexion sur la lentille (L) ou la lame de verre (P) peuvent être négligées. Préciser le lieu de localisation des franges d'interférence et

2) Sachant que pour  $x \leq R$  on a  $e(x) \approx x^2 / 2R$ , écrire la différence de marche  $\delta$  en un point M dans la zone d'interférences. En déduire l'expression de l'ordre d'interférence  $p$  et la nature de la frange au centre (point de contact entre (L) et (P)) d'abscisse  $x = 0$ .

3) Déterminer le rayon  $x_m$  du  $m^{\text{ème}}$  anneau sombre, puis celui du  $m^{\text{ème}}$  anneau brillant en fonction  $\lambda$ ,  $R$  et  $m$ . Que deviennent ces rayons si l'on observe le phénomène d'interférence par transmission en considérant aussi les deux premiers rayons transmis uniquement ?

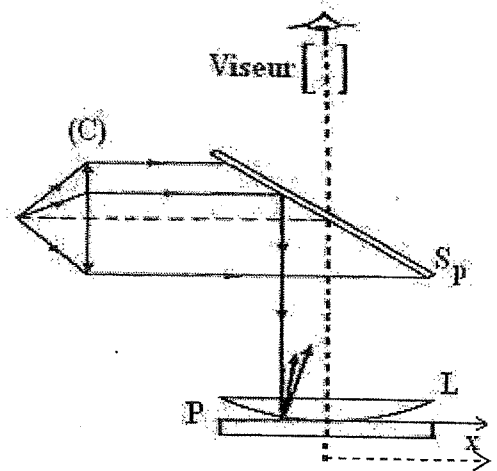


Fig. 2 : Interféromètre de Newton.

**5 pts**

**III-** Un réseau plan comporte  $N$  bandes transparentes rectilignes parallèles, de même largeur  $b$  et de longueur très grande devant  $b$ , percées dans un écran opaque [Fig.3] Les axes de deux bandes consécutives sont séparés par une même distance  $a$ . On éclaire ce réseau par une onde plane monochromatique de longueur d'onde  $\lambda$  sous incidence normale. On montre que l'intensité diffractée à l'infini, dans la direction  $\theta$  s'écrit sous la forme :

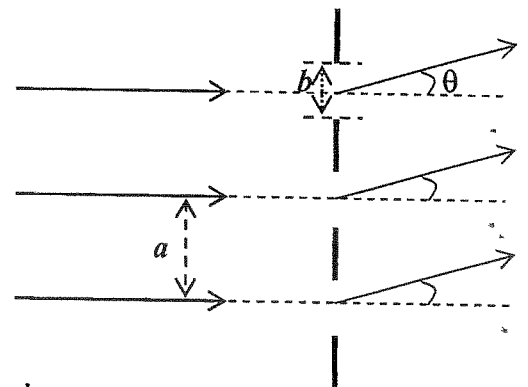


Fig.3 : Réseau diffractant par transmission.

$$I(\theta) = I_0 \underbrace{(\sin \beta / \beta)^2}_1 \underbrace{(\sin N\phi / \sin \phi)^2}_2, \text{ avec } \beta = (kb/2)\sin \theta, \phi = (ka/2)\sin \theta, \text{ et } k = 2\pi / \lambda.$$

1) Que représentent les deux termes désignés 1 et 2 dans l'expression de  $I(\theta)$  ?

2) Pour quelles directions  $\theta_{\min}$  et  $\theta_{\max}$  a-t-on les minima et les maxima principaux de diffraction ? Les maxima principaux dépendent-ils de  $N$  ?

3) Pour  $N=2$ , que vaut  $I(\theta)$  lorsque  $kb \ll 1$  ; puis lorsque  $a \rightarrow 0$  ? A quel système peut-on assimiler ce réseau ( $N=2$ ) dans les deux situations envisagées ?



Examen d'Electricité 3 - Session normale

(Durée 1h30)

On donne :

- l'expression de Laplacien d'une fonction scalaire  $f$  en coordonnées sphériques

$$\Delta f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}$$

- l'expression de la divergence d'un vecteur en coordonnées sphériques :

$$\text{div } \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta V_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V_\phi}{\partial \phi}$$

- l'expression du rotationnel d'un champ de vecteur en coordonnées cylindriques :

$$\text{rot } \vec{A} = \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right] \vec{e}_r + \left[ \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right] \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \vec{e}_z$$

✓ Les deux problèmes sont indépendants

✓ Il sera tenu compte dans la notation de la présentation de la copie d'examen.

Problème I - Une sphère de centre O, de rayon R, constituée d'un matériau diélectrique parfait, de permittivité absolue  $\epsilon$ , est chargée avec une densité volumique uniforme  $\rho > 0$ . La sphère est placée dans le vide. Le potentiel électrique créé par cette sphère en un point M de l'espace est donné par :

$$V(r) = \frac{KQ}{2R} \left( 3 - \frac{r^2}{R^2} \right) \quad \text{pour } 0 < r < R \quad (\vec{OM} = \vec{r})$$

$$V_0(r) = \frac{KQ}{r} \quad \text{pour } r > R$$

K et Q sont des constantes positives.

- 1) En utilisant l'équation de Poisson, calculer la densité volumique de charges  $\rho$  en fonction de K,  $\epsilon$ , Q et R. (On prend  $D = 0$  pour  $r = 0$ ).
- 2) A partir de l'équation locale du théorème de Gauss, Déterminer le vecteur champ déplacement électrique en tout point de l'espace et déduire l'expression du champ électrique. (On note  $(\vec{E}, \vec{D})$  dans diélectrique et  $(\vec{E}_0, \vec{D}_0)$  dans le vide).
- 3) Exprimer le vecteur polarisation  $\vec{P}$  dans la sphère.

+CLUB NAJAH+  
UCD.FS.ELJADIDA  
LE PRÉSIDENT

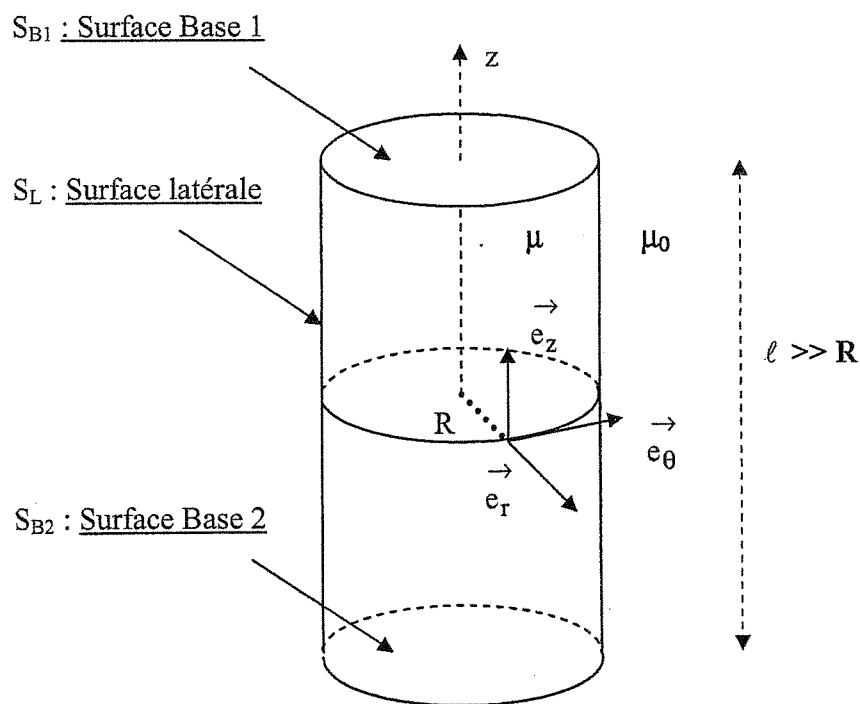
- 4) Calculer les densités de charges fictives de polarisations surfaciques  $\sigma_p$  et volumiques  $\rho_p$ .
- 5) La loi de continuité du champ  $\vec{E}$  est-elle respectée ? justifier votre réponse.
- 6) Calculer l'énergie électrostatique  $\mathcal{E}_p$  localisée dans l'espace.
- 7) On suppose maintenant une cavité vide, sphérique, de centre O et de rayon  $R' < R$ , creusée dans la sphère diélectrique, porteuse de la polarisation P. Exprimer le champ électrique  $E'$  à l'intérieur de la cavité.

**Problème II** - Un cylindre d'axe Oz, de rayon R, de longueur  $\ell \gg R$  (voir la figure ci-dessous). porte une aimantation  $\vec{M}$  de la forme dans la base  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$  :  $\vec{M} = kr^2 \vec{e}_\theta$ ,

$r$  est la distance par rapport à l'axe z du cylindre et  $k$  est une constante positive.

Le milieu aimanté n'est pas parfait.

- 1) Quelle est l'unité de la constante  $k$  ?
- 2) Calculer les densités de courants d'aimantation surfacique  $\vec{j}_{as}$  et volumique  $\vec{j}_{av}$ .
- 3) Calculer le champ magnétique  $\vec{B}_d$  (noté parfois  $\vec{B}_a$ ) dû à l'aimantation en tout point de l'espace. (Envisager les deux cas  $0 < r < R$  et  $r > R$ ).
- 4) Dédire le champ démagnétisant  $\vec{H}_d$  en tout point de l'espace.
- 5) Vérifier la relation de passage à travers la surface du cylindre aimanté.



Vendredi 28 juin 2013

Examen d'Electricité 3 - Session de rattrapage  
(Durée 1h30)

Exercice 1 : Soit diélectrique parfait de forme sphérique de centre O et de rayon R, portant une charge Q répartie dans son volume avec une distribution de charges de densité volumique  $\rho(r)$  donnée par la relation:

$$\begin{cases} \rho(r) = \frac{k}{r^2} & \text{pour } 0 < r < R \\ \rho(r) = 0 & \text{pour } r > R \end{cases}$$

avec  $\vec{OM} = r$ , k est une constante positive qu'on déterminera.

Utiliser les notations suivantes:  $(\vec{D}, \vec{E}, \vec{P}, V)$  dans le diélectrique

$(\vec{D}_0, \vec{E}_0, \vec{P}_0, V_0)$  dans le vide.

- 1) Calculer la constante k en fonction de Q et R et préciser son unité.
- 2) Calculer le vecteur le déplacement électrique et vérifier l'équation locale du théorème de Gauss ( $\text{div } \vec{D} = \rho$ ) en tout point M de l'espace. (Envisager les cas :  $0 < r < R$  et  $r > R$ )
- 3) En déduire le vecteur champ électrique et le vecteur polarisation en tout point M de l'espace.
- 4) Calculer le potentiel électrique correspondant pour  $0 < r < R$  et  $r > R$ .
- 5) Déterminer de deux façons différentes la densité superficielle de polarisation  $\sigma_p$  sur la surface du diélectrique.
- 6) Déterminer la densité volumique de charges de polarisation  $\rho_p$ .
- 7) Calculer la charge totale de polarisation  $Q_p$ . Ce résultat est-il prévisible. Expliquer pourquoi?
- 8) Calculer le champ dépolarisant  $\vec{E}_p$  dans le diélectrique.
- 9) En adaptant un découpage de tout l'espace en respectant la symétrie du système. Calculer l'énergie électrostatique totale emmagasinée dans cet espace.

+CLUB NAJAH+  
UCD.FS.ELJADIDA  
LE PRÉSIDENT

Exercice 2 : Soit un milieu aimanté de volume ( $\mathcal{V}$ ) et de perméabilité absolue  $\mu$ , limité par une surface quelconque ( $S$ ) ne contenant aucun courant réel, le reste de l'espace étant le vide. (voir figure ci-dessous).

Un élément de volume  $d\tau$  du milieu aimanté, centré en  $O$ , a un moment magnétique élémentaire  $d\vec{m} = \vec{M} d\tau$  . où  $\vec{M}$  étant le vecteur aimantation.

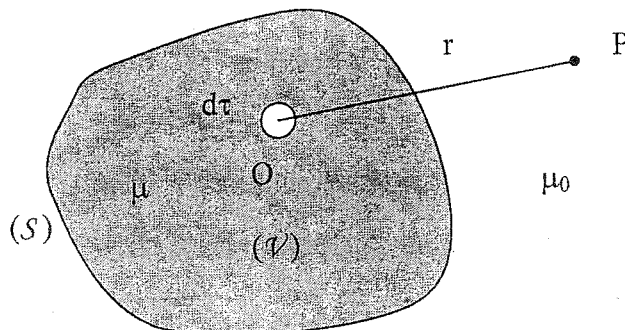
On rappelle que le potentiel vecteur créé par un dipôle magnétique de moment  $\vec{m}$  en un point  $P$  de l'espace est :

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \wedge \vec{r}}{r^3} \quad \text{avec} \quad \vec{OP} = \vec{r}$$

1°) Donner l'expression du potentiel vecteur  $d\vec{A}_a$  créé l'élément de volume  $d\tau$  en un point  $P$  du vide tel que  $\vec{OP} = \vec{r}$  .

2°) Montrer que le milieu aimanté est équivalent à des courants d'aimantation, réparties dans le volume  $\mathcal{V}$  avec la densité volumique  $\vec{j}_{av} = \vec{\text{rot}} \vec{M}$  et à sa surface avec la densité surfacique  $\vec{j}_{as} = \vec{M} \wedge \vec{n}$  , placés dans le vide.

( $\vec{n}$  étant le vecteur unitaire normal à ( $S$ )).



Figure

Examen d'Electricité 3 - Session normale

(Durée 1h30)

Exercice 1 : Soit une lame diélectrique à face parallèles, de susceptibilité électrique  $\chi$ , d'épaisseur  $2d$  dans la direction (Ox) et infinie dans les deux autres directions de l'espace.

Cette lame est placée dans une région où règne un champ électrique  $\vec{E}_0$  uniforme et faisant un angle  $\alpha$  avec (Ox) d'un repère orthonormé  $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ .

La plaque est supposée uniformément polarisée de vecteur polarisation  $\vec{P}$ .

- 1) Exprimer le champ électrique résultant  $\vec{E}$  et le vecteur déplacement électrique  $\vec{D}$  à l'intérieur de la plaque en fonction de  $\epsilon_0$ ,  $\chi$ ,  $\alpha$  et  $\vec{E}_0$ . ( $\epsilon_0$  est la permittivité du vide)
- 2) En déduire le champ dépolarisant  $\vec{E}_p$  créé par les charges de polarisation.
- 3) Etablir l'expression du vecteur polarisation  $\vec{P}$  en fonction de  $\epsilon_0$ ,  $\chi$ ,  $\alpha$  et  $\vec{E}_0$ .

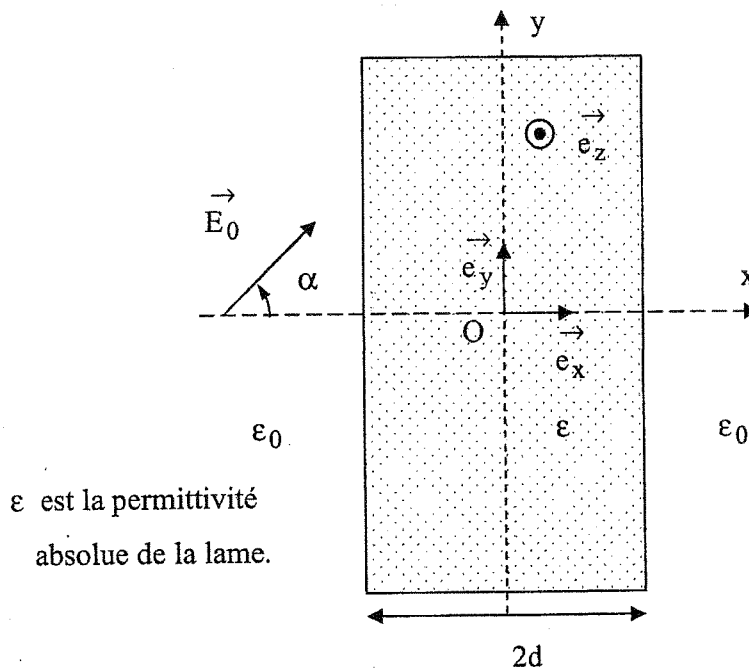


Figure (1)

Exercice 2 : Le circuit magnétique de la figure (2) est supposé linéaire, sans fuites et toutes les branches ont la même section  $S$  et même perméabilité relative  $\mu_r$ .

Données :  $\mu_r = 4000$  ;  $S = 5 \text{ cm}^2$  ; Enroulement :  $N = 500$  spires ;

Les longueurs  $AC = BD = AE = BF = \ell = 25 \text{ cm}$

$AB = CD = EF = 2\ell$

On donne la valeur du champ magnétique dans la colonne centrale  $B_3 = 0,8 \text{ tesla}$ .

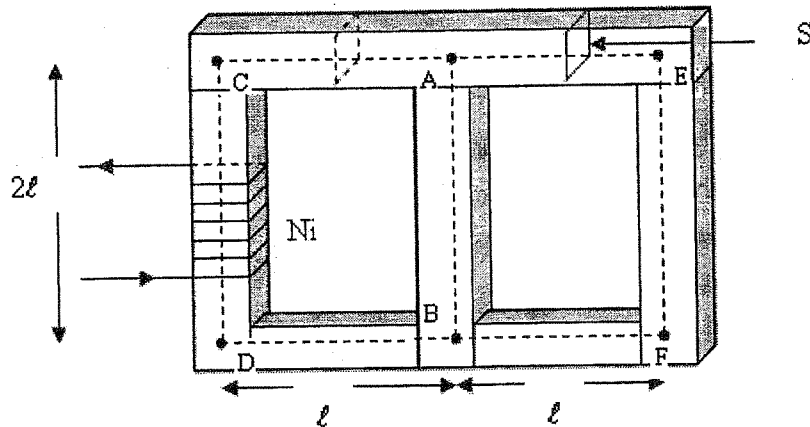


Figure (2)

Dans tout l'exercice vous utilisez les notations suivantes :

$\mathcal{R}_1$  et  $\phi_1$  : la réluctance et le flux dans la branche de gauche ACDB

$\mathcal{R}_2$  et  $\phi_2$  : la réluctance et le flux dans la branche de droite AEFB

$\mathcal{R}_3$  et  $\phi_3$  : la réluctance et le flux dans la colonne centrale AB

- 1) Représenter le schéma électrique équivalent avec les flux, les f.m.m et les réluctances.
- 2) Calculer la valeur du flux  $\phi_3$  dans la colonne centrale.
- 3) Exprimer les réluctances  $\mathcal{R}_1$ ,  $\mathcal{R}_2$  et  $\mathcal{R}_3$  en fonction de  $\ell$ ,  $\mu_0$ ,  $\mu_r$  et  $S$ . Faire l'application numérique. ( $\mu_0$  est la perméabilité du vide =  $4\pi \cdot 10^{-7} \text{ SI}$ )
- 4) Ecrire l'équation qui s'apparente à la loi des nœuds.
- 5) Ecrire l'équation qui s'apparente à la loi des mailles.
- 6) Montrer que le flux  $\phi_1$  dans la branche ACDB est égale à :

$$\phi_1 = \phi_3 \frac{\mathcal{R}_3 + \mathcal{R}_2}{\mathcal{R}_2}$$

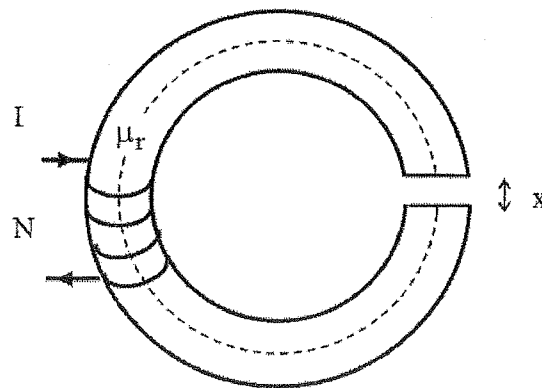
Calculer la valeur de  $\phi_1$ .

- 7) Calculer le courant  $i$  dans  $N$  spires pour avoir un champ  $B_3 = 0,8 \text{ tesla}$  dans la colonne centrale.



Examen d'Electricité 3  
Session normale (Durée 1h30)

Question de cours : Un électro-aimant est constitué d'un tore ferromagnétique en fer doux de perméabilité absolue  $\mu$ , de section constante  $S$ , et présente un entrefer (perméabilité  $\mu_0$ ) d'épaisseur  $x$  ( $x \ll \ell$ ).  $I$  est le courant dans l'enroulement de  $N$  spires et  $\ell$  la longueur de la ligne médiane du tore (en pointillé).



\*CLUB NAJAH+  
UCD.FS.ELJADIDA  
LE PRESIDENT

- 1) Citer quelques propriétés du fer doux.
- 2) Calculer de deux façons différentes la reluctance équivalente  $\mathcal{R}_e$  de ce circuit magnétique.

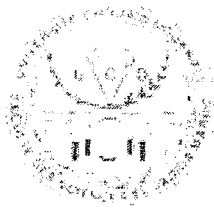
On appelle  $\mathcal{R}_f$  la reluctance du fer et  $\mathcal{R}_0$  la reluctance de l'entrefer.

Exercice : Des électrons de haute énergie bombardent une sphère diélectrique l.h.i. de centre  $O$ , de rayon  $R$ , de permittivité  $\epsilon$  et entourée par le vide. Les électrons piégés dans le diélectrique constituent une distribution volumique de densité  $\rho$  que nous supposons uniformément répartie dans une sphère de centre  $O$  et de rayon  $a < R$ . Dans les calculs utiliser les conventions suivantes :

$(\vec{D}', \vec{E}', \vec{P}')$  dans la zone  $r < a$  ;  $(\vec{D}, \vec{E}, \vec{P})$  dans la zone  $a < r < R$  ;  $(\vec{D}_0, \vec{E}_0, \vec{P}_0)$  dans la zone  $r > R$ .

- 1) Par des raisons de symétrie donner la direction du vecteur déplacement électrique  $\vec{D}$ .
- 2) Calculer le vecteur déplacement en tout point  $M$  de l'espace ( $\vec{OM} = r\vec{e}_r$ )
- 3) Dédire le vecteur champ électrique et le vecteur polarisation en tout point  $M$  de l'espace.
- 4) Déterminer les densités de charges de polarisation partout où il y en a. Rappeler leur signification physique.
- 5) Vérifier la neutralité globale des charges de polarisation.
- 6) Vérifier les relations de continuité relative à  $\vec{D}$  et  $\vec{E}$  sur les deux surfaces ( $r = a$  et  $r = R$ ).

On rappelle qu'en symétrie sphérique la composante radiale de  $\text{div} \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r)$ .



## EXAMEN DE MECANIQUE QUANTIQUE

## SESSION DE RATTRAPAGE

## SMP4

+CLUB NAJAH+  
UCD.FS.ELJADIDA  
LE PRESIDENT

## I-Questions du cours :

1-Montrer que les valeurs propres d'un opérateur linéaire sont des quantités intrinsèques, indépendantes du choix de la représentation matricielle de cet opérateur dans deux bases différentes et arbitraires.

2-Retrouver la relation pratique donnant la longueur d'onde d'un électron non relativiste :

$$\lambda = \frac{12,3}{\sqrt{U}} \text{ \AA}$$

Où  $U$  est le potentiel d'accélération de l'électron, on donne :

$$h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ J.s} \quad ; \quad m_e = 9 \cdot 10^{-31} \text{ Kg} \quad ; \quad q = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

## II-Exercice 1 :

Dans une base quelconque, on considère l'opérateur dont la matrice s'écrit :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -2i & 3 \end{pmatrix}$$

1-L'opérateur  $A$  est-il hermitique ?

2-La matrice  $A$  est en fait écrite dans la base  $B = \{ |e_1\rangle, |e_2\rangle \}$ , telle que :

$$\langle e_1 | e_1 \rangle = 5 \quad ; \quad \langle e_2 | e_2 \rangle = 2 \quad ; \quad \langle e_1 | e_2 \rangle = 3i \quad ; \quad \langle e_2 | e_1 \rangle = -3i$$

a-Montrer que  $A$  est effectivement hermitique et conclure.

c-Trouver les valeurs propres de l'opérateur  $A$ .

d-Calculer les vecteurs propres de  $A$ . Montrer qu'ils sont orthogonaux.

*Examen de mécanique quantique*  
*Durée 1h30mn*

**Exercice**

On considère pour un système physique une observable  $A$  ne commutant pas avec le hamiltonien du système  $H$  dont les valeurs propres dans la base orthonormée complète  $|u_1\rangle$ ,  $|u_2\rangle$  sont  $E_1$  et  $E_2$  respectivement. La mesure de l'observable  $A$  donne les valeurs propres  $a_1$  et  $a_2$  dont les états propres s'écrivent  $|\varphi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|u_1\rangle + |u_2\rangle)$  et  $|\varphi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|u_1\rangle - |u_2\rangle)$ .

Si à  $t=0$ , l'état du système est  $|\psi(0)\rangle = |\varphi_1\rangle$ , montrer que l'évolution dans le temps de la

moyenne de l'observable  $A$  est donnée par:  $\langle A \rangle_t = \frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{a_1 - a_2}{2} \cos\left(\frac{E_1 - E_2}{\hbar} t\right)$ .

**Problème**

L'équation de Schrödinger pour un oscillateur harmonique  $1d$  est donnée par :

$$H|\psi\rangle = E|\psi\rangle \quad \text{où} \quad H = \frac{P_x^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 X^2.$$

- 1- Ecrire cette équation en représentation  $|p\rangle$ .
- 2- Montrer que cette équation prend les formes suivantes :

$$\begin{aligned}(AB+1)\varphi(p) &= \lambda\varphi(p) \\ (BA-1)\varphi(p) &= \lambda\varphi(p)\end{aligned}$$

Où  $\varphi(p) = \langle p|\psi\rangle$ ,  $A = -\frac{d}{d\xi} + \xi$  et  $B = \frac{d}{d\xi} + \xi$  ( $\xi$  et  $\lambda$  sont à déterminer).

- 3- Calculer le commutateur  $[A, B]$ .
- 4- L'état fondamental  $\varphi_0(p)$  de valeur propre  $E_0 = \frac{\hbar\omega}{2}$  est obtenu en imposant la

condition  $B\varphi_0(p) = 0$ . Montrer que  $\varphi_0(p)$  est de la forme  $\varphi_0(p) = \alpha e^{-\frac{1}{2}\xi^2}$  où  $\alpha$  est donnée par normalisation.

- 5- Donner la fonction propre dans l'espace réel  $\psi_0(x)$  et montrer que le principe d'incertitude de Heisenberg est vérifié.

$$\text{On donne } \int \exp(-\alpha^2 z^2 \pm \beta z) dz = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^2}} e^{\left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2} ; \quad \text{Re}(\alpha) > 0.$$

\*CLUB NAJAH\*  
UCD.FS.EL JADIDA  
LE PRÉSIDENT

## Examen de Mécanique Quantique

Durée 1H30

### I. Questions de Cours

- 1) Soit A un opérateur hermitique, montrer que :
  - a) Les valeurs propres de A sont réelles.
  - b) Deux vecteurs propres de A associés à deux valeurs propres différentes sont orthogonaux.
- 2) Soient A et B deux observables tel que  $[A, B] = 0$ .
  - a) Montrer que si  $|\Psi\rangle$  est vecteur propre de A,  $B|\Psi\rangle$  est aussi vecteur propre de A avec la même valeur propre.
  - b) Si  $|\Phi\rangle$  et  $|\Psi\rangle$  sont des vecteurs propres de A de valeurs propres différentes, montrer que l'élément de matrice  $\langle\Phi|B|\Psi\rangle$  est nul.
- 3) On considère une particule libre de masse m
  - a) Montrer que la valeur moyenne  $\langle x \rangle$  de la position est une fonction linéaire du temps.
  - b) Faire la liaison avec la mécanique classique.

### II. Problème II

Soit un système conservatif décrit par un hamiltonien H dans la base orthonormée des états propres  $\{|\varphi_1\rangle, |\varphi_2\rangle\}$  associés aux valeurs propres  $E_1$  et  $E_2$ . Soit l'observable B définie dans la même base par ses éléments :  $B_{11} = B_{22} = b$  et  $B_{12} = B_{21} = -b$  ou b est strictement positive.

- 1) Ecrire les matrices correspondantes aux observables H et B
- 2) Si l'instant initial ou le système est dans l'état  $|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\varphi_1\rangle + |\varphi_2\rangle)$ , on procède à une mesure de la grandeur physique B, qu'obtiendrait-on comme résultat et avec quelle probabilité?
- 3) Donner l'état du système à un instant t ultérieurs.

\*CLUB NAJAH\*  
UCD.FS.ELJADIDA  
LE PRÉSIDENT

**EXAMEN**

**MECANIQUE QUANTIQUE**

Durée 1h30

\*CLUB NAJAH\*  
UCD.FS.ELJADIDA  
LE PRESIDENT

**Exercice 1**

L'espace des états est muni d'une base orthonormée  $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle\}$ . On pose  $|\varphi\rangle = (1+i)|u_1\rangle + |u_2\rangle$ ,  $|\theta\rangle = i|u_2\rangle + (1-i)|u_3\rangle$  et  $|\psi\rangle = |\varphi\rangle + 2|\theta\rangle$ .

1a- Calculer les produits scalaires suivants :  $\langle\varphi|\varphi\rangle$ ,  $\langle\varphi|\theta\rangle$ ,  $\langle\theta|\varphi\rangle$  et  $\langle\psi|\psi\rangle$

1b- Les vecteurs  $|u_1\rangle$ ,  $|u_2\rangle$  et  $|u_3\rangle$  sont représentés par les matrices suivantes :  $|u_1\rangle \rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$   
 $|u_2\rangle \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  et  $|u_3\rangle \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Donner la représentation matricielle des kets  $|\varphi\rangle$  et  $|\theta\rangle$  et des bras  $\langle\varphi|$  et  $\langle\theta|$ .

1c- L'opérateur  $A$  est défini par les relations  $A|u_1\rangle = a|u_2\rangle$ ,  $A|u_2\rangle = a|u_1\rangle$  et  $A|u_3\rangle = a|u_3\rangle$  où  $a$  est un nombre réel.

Donner la représentation matricielle de  $A$  dans la représentation précédente. L'opérateur  $A$  est-il hermitique ?

Exprimer le ket  $A|\varphi\rangle$  en fonction des vecteurs de base  $|u_k\rangle$ .

1d- Montrer que les kets  $|v_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|u_1\rangle + |u_2\rangle)$ ,  $|v_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|u_1\rangle - |u_2\rangle)$  et  $|u_3\rangle$  sont vecteurs propres de l'opérateur  $A$ .

Quelles sont les valeurs propres associées et leurs degrés de dégénérescence ?

Le système physique est dans l'état  $|\theta\rangle$ . Quels sont les résultats et les probabilités d'une mesure associée à l'opérateur  $A$  ?

## Exercice 2

1. Soient  $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$  trois opérateurs, montrer les identités suivantes

$$\begin{aligned} [\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] &= \hat{B} [\hat{A}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{B}] \hat{C} \quad ; \quad [\hat{A}\hat{B}, \hat{C}] = \hat{A} [\hat{B}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{C}] \hat{B} \\ [\hat{A}, \hat{B} + \hat{C}] &= [\hat{A}, \hat{B}] + [\hat{A}, \hat{C}] \\ [\hat{A}, \hat{B}]^\dagger &= [\hat{B}^\dagger, \hat{A}^\dagger] \end{aligned}$$

2. Dans l'hypothèse où  $[\hat{A}, \hat{C}] = 0$  et  $[\hat{B}, \hat{C}] = 0$  a-t-on toujours  $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$  ?

3. Soient  $\hat{A}, \hat{B}$  deux opérateurs commutants avec leur commutateur:

(a) Montrer que  $[\hat{A}, \hat{B}^n] = n\hat{B}^{n-1} [\hat{A}, \hat{B}]$  et  $[\hat{A}^n, \hat{B}] = n\hat{A}^{n-1} [\hat{A}, \hat{B}]$ .

- (b) Soit  $f(z)$  une fonction de la variable complexe  $z$  définie par la série entière  $f(z) = \sum_{i=1}^{\infty} a_n z^n$ . On définit l'opérateur  $f(\hat{A})$  par la série  $f(\hat{A}) = \sum_{i=1}^{\infty} a_n \hat{A}^n$ . Montrer que

$$[\hat{A}, f(\hat{B})] = f'(\hat{B}) [\hat{A}, \hat{B}]$$



**EXAMEN DE MECANIQUE QUANTIQUE SMP4**  
**DUREE 1H30**

**QUESTIONS DE COURS**

1. Calculer la relation de commutation  $[X, P_X]$ .
2. Montrer que les opérateurs  $X$  et  $P_X$  sont des opérateurs hermétiques.
3. Etablir l'équation donnant  $\frac{d\langle A \rangle}{dt}$  où  $A$  est une observable quelconque.

**PROBLEME I** : Molécule  $\text{NH}_3$

On considère une molécule d'ammoniac et on s'intéresse au sous-espace  $E_2$  formé par les combinaisons linéaires de ses états normés de plus basses énergies  $|\psi_s\rangle$  et  $|\psi_a\rangle$ . L'hamiltonien de la molécule s'écrit dans la base  $\{|\psi_s\rangle \text{ et } |\psi_a\rangle\}$  :

$$H = \begin{pmatrix} E_0 - A & 0 \\ 0 & E_0 + A \end{pmatrix}$$

Avec  $A > 0$ . On définit l'opérateur  $X$  associé à la disposition par rapport au centre dans cette même base par :

$$X = d \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ou  $d$  est un paramètre fixé et connu.

On prépare la molécule à  $t = 0$  dans l'état :  $|\psi_0\rangle = \frac{|\psi_s\rangle + |\psi_a\rangle}{\sqrt{2}}$

+CLUB NAJAH+  
UCD.FS.ELJADIDA  
LE PRÉSIDENT

1. Les kets  $|\psi_s\rangle$  et  $|\psi_a\rangle$  sont-ils perpendiculaires ? Justifier.
2. Calculer les valeurs propres et kets propres de  $X$ .
3. Calculer la valeur moyenne de  $X$  et  $\Delta X$  à  $t = 0$ .
4. Calculer la probabilité de trouver le résultat  $+d$  lors de la mesure de  $X$  à  $t = 0$ .
5. Ecrire l'expression de  $|\psi(t)\rangle$  à un instant ultérieur  $t > 0$ .
6. Calculer la valeur moyenne de  $X$  et  $\Delta X$  à  $t$ .
7. On mesure  $X$  à  $t$  et on obtient le résultat  $+d$ . Quelle est la probabilité d'obtenir ce résultat ?
8. Calculer  $\langle X \rangle_{t=0}$  et  $\langle X \rangle_t$  en utilisant un théorème que l'on précisera et conclure.

On donne :  $\Delta X = \sqrt{\langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2}$

*Examen de Mécanique Quantique*  
*Filière SMP*

**EXERCICE**

On considère un système unidimensionnel de hamiltonien :

$$H = \frac{P^2}{2m} + V(X) \quad \text{ou} \quad V(X) = \lambda X^n$$

- 1) Calculer le commutateur  $[H, XP]$ .
- 2) En prenant la valeur moyenne de ce commutateur, montrer qu'on a, pour tout état propre  $|\varphi\rangle$  de  $H$ , la relation  $2\langle\varphi|T|\varphi\rangle = n\langle\varphi|V|\varphi\rangle$  ou  $T = \frac{P^2}{2m}$  est l'opérateur énergie cinétique.

**PROBLEME**

On considère un système physique dont l'espace des états est de dimension 2. Dans la base orthonormée  $|u_1\rangle$  et  $|u_2\rangle$  l'Hamiltonien du système s'écrit :

$$H_0 = \hbar\omega_0 \begin{pmatrix} \alpha & \delta \\ \gamma & \beta \end{pmatrix}$$

- 1) A quelles conditions générales doivent satisfaire les nombres  $\alpha, \beta, \gamma$  et  $\delta$  ?
- 2) Déterminer les valeurs propres de  $H_0$  :
  - a) Dans le cas  $\alpha \neq \beta$  et  $\gamma = \delta = 0$ . Quels sont les vecteurs propres ?
  - b) Dans le cas  $\alpha = \beta$  et  $\gamma = \delta = 0$ . Quels sont les vecteurs propres ?
- 3) On considère maintenant le cas suivant :

$$H_0 = \hbar\omega_0 \begin{pmatrix} 2 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 4 \end{pmatrix}$$

- a) Calculez les énergies propres du système que vous noterez :  $E_+$  et  $E_-$  avec  $E_+ \geq E_-$ .
- b) Donnez l'expression des états propres normés que vous noterez  $|\psi_+\rangle$  et  $|\psi_-\rangle$ .
- 4) Au temps  $t = 0$ , on considère que le système se trouve dans l'état  $|\phi(0)\rangle = |u_1\rangle$ .
- 5) Calculer l'état du système à un temps  $t$  quelconque.
- 6) Quelle est la probabilité de mesurer  $E_+$  et  $E_-$  à un temps  $t$  quelconque ?
- 7) Quelle est la valeur moyenne de l'énergie notée  $\langle H_0 \rangle_t$ , à  $t$  quelconque ?

\*CLUB NAJAH+  
UCD.FS.ELJADIDA  
LE PRÉSIDENT

## Examen de Rattrapage de Mécanique Quantique SMP4

### PROBLEME I

Soit une particule de masse  $m$  dans un espace à une dimension soumise à un potentiel  $V(x)$  indépendant du temps. On désigne par  $|\Psi_t\rangle$  le ket décrivant l'état quantique de la particule à l'instant  $t$ .

1) Ecrire l'équation de Schrödinger en représentation  $\{|x\rangle\}$ .

2) Cette équation possède des solutions de la forme  $\Psi(x,t) = \Phi(x) e^{-i\omega t}$ .

Ecrire l'équation différentielle à laquelle obéit  $\Phi(x)$ ; on posera  $E = \hbar \omega$ .

3) On considère le cas particulier où  $V$  est constant :  $V = V_0$ .

- Dans le cas où  $E > V_0$ , Donner la solution générale.
- Dans le cas où  $E < V_0$ , Donner la solution générale.

4) Les solutions obtenues dans les deux cas précédents sont-elles physiquement acceptables? Justifier votre réponse.

5) Etudier les conditions de continuités en  $x = 0$

### PROBLEME II

Soit  $A$  un opérateur et  $A^+$  son adjoint, tel que  $[A, A^+] = \mathbf{1}$  (opérateur identité). On désigne par  $|\phi_n\rangle$  des kets appartenant à l'espace des états d'un système physique avec  $n$  entier positif ou nul.

L'action des opérateurs  $A$  et  $A^+$  sur les kets  $|\phi_n\rangle$  est définie par :

$$A|\phi_n\rangle = \sqrt{n}|\phi_{n-1}\rangle \text{ et } A^+|\phi_n\rangle = \sqrt{n+1}|\phi_{n+1}\rangle \quad \text{avec } n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

1) On introduit l'opérateur  $N$  défini par  $N = A^+ A$

- $N$  est-il hermitique
- Calculer les commutateurs  $[N, A]$  et  $[N, A^+]$ .
- Montrer que  $|\phi_n\rangle$  sont des kets propres de  $N$  associés à des valeurs propres que l'on précisera.

2) Le Hamiltonien  $H$  du système s'écrit :

$$H = \left(N + \frac{1}{2}\mathbf{1}\right) \cdot \hbar\omega \text{ ou } \omega \text{ est la pulsation du système.}$$

Vérifier que les  $|\phi_n\rangle$  sont aussi kets propres de  $H$  associés aux valeurs propres  $E_n$  que l'on déterminera.

\*CLUB NAJAH\*  
UCD.FS.ELJADIDA  
LE PRÉSIDENT

### EXAMEN DE CRISTALLOGRAPHIE

1°) Donner les projections stéréographiques des points (x, y, z) liés par la symétrie dans les classes suivantes 4, 4mm, 4/ mmm.

2°) Soit un composé de symétrie  $P4_3$

- Quels sont le groupe ponctuel et le système cristallin correspondants au groupe d'espace  $P4_3$ .
- Donner la projection de la maille sur le plan (001) avec un atome en position générale et en prenant l'axe  $4_3$  à l'origine.
- Déterminer les conditions de réflexion pour le groupe d'espace  $P4_3$ .

3°) Le dépouillement d'un spectre de Rayons X du composé ZnS a donné les valeurs des distances interréticulaires  $d_{hkl}$  (Å) suivantes :

d(Å)	3.123	2.705	1.912	1.633	1.561	1.351	1.240	1.209	1.1034	1.04703
I/I <sub>0</sub>	100	10	51	30	2	6	9	2	9	5
hkl	111	200	220	311	222	400	331	420	422	511

- Rappeler les conditions de diffraction pour les modes de réseau P, I et F
- Déterminer le mode de réseau du composé ZnS
- Donner l'expression du facteur de structure des plans (111) et (200) en confirmant que l'intensité diffractée par le plan (111) est supérieure à celle diffractée par le plan (200).

4°) Le dépouillement des films de Guinier de  $Fe_{1-x}O$  obtenu par RX.

( $Cu \lambda_{K\alpha} = 1.54 \text{ Å}$ ) a donné les valeurs des distances L (L= 4θ) suivantes :

$Fe_{0.9364}O$

L (mm)	72,17	83,80	121,47
--------	-------	-------	--------

$Fe_{0.9214}O$

L (mm)	72,27	83,92	121,66
--------	-------	-------	--------

$Fe_{0.8951}O$

L (mm)	72,47	84,15	122
--------	-------	-------	-----

\*CLUB NAJAH+  
UCO.FS.ELJADIDA  
LE PRÉSIDENT

- Déterminer le mode de réseau du protoxyde de Fer  $Fe_{1-x}O$ .
- Déterminer les valeurs du paramètre a pour les trois phases précédentes.

## EXAMEN DE CRISTALLOGRAPHIE

La métallurgie du fer est tributaire de différents minerais, oxyde de fer parmi lesquels le protoxyde de fer  $\text{FeO}$  est de type structural  $\text{NaCl}$ , la magnétite  $\text{Fe}_3\text{O}_4$  est un spinelle inverse et le sesquioxyde de fer  $\text{Fe}_2\text{O}_3$  appelé hématite rouge, est un spinelle lacunaire.

- 1) On veut étudier par la diffraction des rayons X, le protoxyde de Fer,  $\text{Fe}_{1-x}\text{O}$  sans exciter le rayonnement de fluorescence K du Fer. Quelles sont parmi les anticathodes suivantes : Cuivre, Cobalt, Molybdène, Fer, qui seront utilisables ?

$$\text{Cu} : \lambda_{K\alpha} = 1.54 \text{ \AA} \quad \text{Fe} : \lambda_{K\alpha} = 1.932 \text{ \AA} \quad \text{Co} : \lambda_{K\alpha} = 1.79 \text{ \AA} \quad \text{Mo} : \lambda_{K\alpha} = 0.71 \text{ \AA}$$

- 2) Quels filtres doit-on choisir parmi les différents éléments suivants : Mo, Fe, V, Ni afin d'éliminer au maximum le fond continu du tube ainsi que la raie  $K_\beta$  de l'anticathode choisie pour ne conserver que la raie  $K_\alpha$  monochromatique.

$$\text{Cu} : \lambda_{K\beta} = 1.392 \text{ \AA} \quad \text{Fe} : \lambda_{K\beta} = 1.756 \text{ \AA} \quad \text{Co} : \lambda_{K\beta} = 1.621 \text{ \AA} \quad \text{Mo} : \lambda_{K\beta} = 0.632 \text{ \AA}$$

### Données :

Filtre	Mo	Fe	V	Ni
$\lambda_K(\text{\AA})$	0.619	1.745	2.268	1.484

- 3) Le dépouillement des films de Guinier de  $\text{Fe}_{1-x}\text{O}$  obtenu par RX ( $\text{Fe} \lambda_{K\alpha} = 1.932 \text{ \AA}$ ) a donné les valeurs des distances  $L$  ( $L = 40$ ) suivantes :

$\text{Fe}_{0.9364}\text{O}$

L(mm)	91,46	106,61	157,41
-------	-------	--------	--------

$\text{Fe}_{0.9214}\text{O}$

L(mm)	92,74	108,07	159,68
-------	-------	--------	--------

$\text{Fe}_{0.8951}\text{O}$

L(mm)	92,99	108,40	160,17
-------	-------	--------	--------

\*CLUB NAJAH+  
UCD.FS.ELJADIDA  
LE PRESIDENT

- Déterminer le mode de réseau du protoxyde de Fer  $\text{Fe}_{1-x}\text{O}$ .
- Déterminer les valeurs du paramètre  $a$  pour les trois phases précédentes
- Justifier que l'excès d'oxygène par rapport à la composition stœchiométrique 1/1 provient des lacunes de Fe :  $(\text{Fe}_{1-x}\text{O})$  et non pas d'insertion d'oxygène  $\text{FeO}_{1+y}$  avec  $y = [x / 1-x]$  en comparant les valeurs des densités théoriques dans les deux cas : lacunaire en Fer ( $\text{Fe}_{1-x}\text{O}$ ) et insertion d'oxygène  $\text{FeO}_{1+y}$  avec celles des densités expérimentales.

**DONNEES :** Masse molaire : Fe =56 O =16       $\text{FeO}$  est isotype à NaCl       $N_{\text{avogadro}} = 6,022 \cdot 10^{23}$

x	0.0635	0.0786	0.1049
densité expérimentales	5.70	5.64	5.55

4) Donner le système cristallin et le groupe ponctuel, correspondants aux groupes d'espace suivants:  $P2/m$ ,  $P2_1/c$ ,  $P22_2$ ,  $Pmm2$ ,  $P4_2$ ,  $P6_2$

5) Le Chlorure de Plomb  $\text{PbCl}_2$  est de symétrie **Pnma** dont le symbole complet est **P2<sub>1</sub>/n2<sub>1</sub>/m2<sub>1</sub>/a** et dont les coordonnées d'un atome de Cl en position générale sont :

$$\begin{aligned}
 (x, y, z) ; & \quad (-x+1/2, -y, z+1/2) ; & \quad (-x, y+1/2, -z) ; & \quad (x+1/2, -y+1/2, -z+1/2) \\
 (-x, -y, -z) ; & \quad (x+1/2, y, -z+1/2) ; & \quad (x, -y+1/2, z) ; & \quad (-x+1/2, y+1/2, z+1/2)
 \end{aligned}$$

- Quels sont le groupe ponctuel et le système cristallin correspondants à **Pnma**.
  - Représenter la projections de la maille sur les plans (001).
  - Représenter sur la projection tous les éléments de symétrie.
  - Déterminer les conditions de réflexion pour le groupe d'espace **Pnma**.
- 6) Représenter les coordonnées en position générale ainsi que les éléments de symétrie correspondants au groupe d'espace **Pnma**
- en prenant l'origine à l'intersection des trois miroirs
  - en prenant l'origine au centre de symétrie.



**Epreuve de cristallographie et radiocristallographie**  
**Module Chimie Minérale 2, Filières S.M.C. 4**  
**Durée : 1h30mn - Documents non autorisés**  
**Session de rattrapage**

**PARTIE A (CRISTALLOGRAPHIE GEOMETRIQUE)**

- 1) Tracer la projection stéréographique de la classe de symétrie  $4/m$ .
- 2) Donner la liste des opérations de symétrie de cette classe.
- 3) Calculer le degré de symétrie. Déduire s'il s'agit d'une classe holoèdre ou mérièdre.
- 4) A quel système cristallin peut-on associer cette classe de symétrie ?
- 5) Représenter le groupe d'espace  $P4/n$  dans le plan  $xoy$  avec l'origine sur un centre d'inversion.
- 6) Tracer toutes les opérations de symétrie du groupe.
- 7) Donner les positions générales équivalentes.

+CLUB NAJAH+  
UCD.FS.ELJADIDA  
LE PRÉSIDENT

**PARTIE B (RADIOCRISTALLOGRAPHIE)**

- 1) Qu'elles sont les différents domaines d'applications des rayons X ?
- 2) Pourquoi la diffraction X indique toujours la présence d'un centre de symétrie même pour les structures non centrosymétriques ?
- 3) Pour un mode de réseau C (face C centrée),
  - a. Donner les coordonnées réduites générales
  - b. Donner l'expression du facteur de structure  $F_{hkl}$
  - c. Déterminer la condition d'extinction.
- 4) Pour un composé cristallisant dans le système cubique avec  $a = 3,5 \text{ \AA}$ , la diffraction des RX par la famille  $(1\ 1\ 1)$  est observée à un angle  $2\theta = 44,80^\circ$ 
  - a. Calculer la distance réticulaire  $d_{111}$
  - b. Calculer la longueur d'onde  $\lambda$  des rayons X utilisés.

\*\*\*\*\*

Epreuve de cristallographie et radiocristallographie  
Module Chimie Minérale 2, Filières S.M.C. 4  
Durée : 1h30mn - Documents non autorisés

**PARTIE A (CRISTALLOGRAPHIE GEOMETRIQUE)**

Sachant qu'un groupe d'espace admet les positions générales équivalentes suivantes :

$$(x,y,z); (\bar{x}, \bar{y}, z); (x, \bar{y}, z+1/2); (\bar{x}, y, z+1/2); \\ (x+1/2, y+1/2, z); (\bar{x}+1/2, \bar{y}+1/2, z); (x+1/2, \bar{y}+1/2, z+1/2); (\bar{x}+1/2, y+1/2, z+1/2)$$

- 1 - Trouver les éléments de symétrie qui relient les quatre premières positions.
- 2 - Quelle est la classe de symétrie correspondante ?
- 3 - S'agit-il d'une classe holoèdre ou mérièdre. Justifier votre réponse en calculant le degré de symétrie ?
- 4 - A quel système cristallin peut-on attribuer cette classe de symétrie ?
- 5 - Quel est le mode du réseau ?
- 6 - En déduire le symbole de ce groupe d'espace
- 7 - Tracer la projection de ce groupe dans le plan (xoy) en représentant tous les éléments de symétrie de ce groupe.

**PARTIE B (RADIOCRISTALLOGRAPHIE)**

- 1 - Quelle est la différence entre un rayonnement X dur et mou ? Lequel est utilisé pour la diffraction X ?
- 2 - Quelle est la condition pour qu'une famille de plan (h k l) diffracte les rayons X ?
- 3 - Pour une maille l'amplitude du rayonnement X diffracté s'écrit sous la forme :

$$A^{\text{maille}} = A^e - \sum_{j=1}^n f_{aj} e^{2i\pi(hx_j + ky_j + lz_j)}$$

Que représentent les termes  $A^e$ ,  $f_{aj}$

- 4 - Soit un composé cristallisant dans le système cubique avec le mode de réseau F.
  - a - Donner les coordonnées réduites des positions générales
  - b - Donner l'expression du facteur de structure pour la famille réticulaire (h k l).
  - c - Calculer le facteur de structure pour la famille (1 2 1). Que peut-on conclure ?
- 3 - Sachant que la raie de diffraction de la famille (1 1 1) est enregistrée à  $2\theta = 28,1^\circ$ 
  - a - Calculer la distance réticulaire pour cette famille.
  - b - Calculer le paramètre a de la maille.

Données :

$$\lambda_{RX} = 1,5405 \text{ \AA}$$

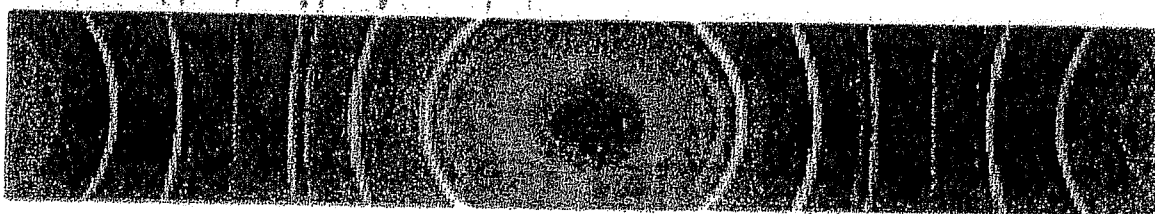
\*\*\*\*\*

### EXAMEN DE CRISTALLOGRAPHIE :

1) Donner les projections stéréographiques des points (x, y, z) liés par la symétrie, dans les classes suivantes : 2, m, 3/m et 6.

2) Le groupe spatial d'un cristal orthorhombique conduit aux coordonnées suivantes d'un point en position générale : x, y, z ; -x, y, z ; x, -y, z + 1/2 ; -x, -y, z + 1/2  
à l'aide d'une projection sur le plan (001) déduire la nature de l'axe binaire [001] et des miroirs (100) et (010).

3) L'étude cristallographique du composé MgO par la méthode de Debye- Scherrer est représentée par la figure suivante



a) Déterminer le paramètre cristallographique a et le mode de réseau de MgO sachant qu'il est cubique.

b) Démontrer que l'intensité diffractée  $I_{hkl} = F_{hkl}^2 \cdot \rho \cdot [(1 + \cos^2 2\theta) / \sin^2 \theta \cos \theta]$ .  
a pour expressions pour les plans (111) et (200)

$$I_{111} = 16(f_{O^{2-}} - f_{Mg^{2+}})^2 \cdot 8 \cdot [(1 + \cos^2 2\theta_{111}) / \sin^2 \theta_{111} \cos \theta_{111}] \quad \text{et}$$

$$I_{200} = 16(f_{O^{2-}} + f_{Mg^{2+}})^2 \cdot 6 \cdot [(1 + \cos^2 2\theta_{200}) / \sin^2 \theta_{200} \cos \theta_{200}]$$

c) Recopier et compléter le tableau suivant

hkl	$L_{(mm)}$ mesurée	$\theta$	$\sin \theta / \lambda$	$f_{Mg^{2+}}$	$f_{O^{2-}}$	$ F_{hkl} $	$I_{hkl}$	$I/I_0 \times 100$
111				8.64	5.64			
200				8.256	4.865			

#### Données :

Rayon de la chambre de Debye-Scherrer :  $R = (180/2\pi) \text{ mm}$  Radiation  $\lambda_{K\alpha} = 1.544$

L'intensité de diffraction est donnée par L'expression suivante :

$$I_{hkl} = F_{hkl}^2 \cdot \rho \cdot [(1 + \cos^2 2\theta) / \sin^2 \theta \cos \theta]$$

$\rho$  : Multiplicité ; pour le plan (111)  $\rho = 8$  et pour le plan (200)  $\rho = 6$ .

$(1 + \cos^2 2\theta) / \sin^2 \theta \cos \theta$  = Facteur de Lorentz polarisation.

$F_{hkl}$  = facteur de structure =  $\sum_j e^{2\pi i (hx_j + ky_j + lz_j)}$

$f_j$  = facteur de diffusion atomique =  $\int 4\pi r^2 (r) [(\sin 4\pi r \sin$

CLUB NAJAH  
UCD.FS.ELJADIDA  
LE PRÉSIDENT

EPREUVE DE L'ELEMENT DE MODULE  
CRISTALLOGRAPHIE  
4<sup>ème</sup> SEMESTRE  
(Durée : 45mn)

Documents interdits

---

On considère le groupe d'espace  $Amm2$ .

1 – Quels sont : le mode de réseau (à expliciter), le groupe ponctuel, de Laue, le système cristallin et les paramètres correspondants à ce groupe d'espace.

2 – Faire la projection sur le plan  $(x \ O \ y)$  de ce groupe d'espace en représentant tous les éléments de symétrie. Figurer sur la même figure toutes les positions équivalentes à partir d'une position d'ordre générale  $x \ y \ z$ . et même celles dues au mode de réseau  $A$ .

3 – Schématiser tous les autres éléments de symétries régénérés par les éléments de symétrie de départ.

4 – Préciser les coordonnées des positions particulières possibles.

\*\*\*\*\*

## EXAMEN DE CRISTALLOGRAPHIE

I) On dispose de quatre anticathodes : Cuivre, Cobalt, Molybdène, Fer et on veut étudier par la diffraction des rayons X un cristal de Fer, sans exciter le rayonnement de fluorescence K(1,745Å).

Quelles sont les anticathodes qu'on doit utiliser ?

$$\lambda_{K\alpha}(Fe) = 1.932 \text{ Å} \quad \lambda_{K\alpha}(Co) = 1.79 \text{ Å} \quad \lambda_{K\alpha}(Mo) = 0.71 \text{ Å}$$

II) L'étude cristallographique par RX de KCl ( $\lambda_{K\alpha} = 1.54 \text{ Å}$ ) a donné les résultats suivants :

2θ	28.3	40.5	50.2	58.6	66.4	73.7	87.6	94.5
$d_{hkl}$	3.15	2.22	1.815	1.573	1.40	1.284	1.112	1.048
hkl	100	110	111	200	210	211	220	221

a) Déterminer le mode de réseau de KCl en tenant compte que  $K^+$  et  $Cl^-$  sont isoelectroniques.

b) Déterminer le paramètre cristallographique a sachant que KCl est cubique

Données : tableau donnant les valeurs  $(d_1/d_n)^2$  dans le système cubique « simple ».

	$(d_1/d_n)^2$						
P	1	2	3	4	5	6	8
I	1	2	3	4	5	6	7
F	1	4/3	8/3	1 1/3	12/3	16/3	19/3

III) L'étude structurale de L'oxyde de Titane  $TiO_2$  variété  $\alpha$  a montré qu'il est de symétrie  $P4_2/mnm$  et que les positions atomiques occupées par les ions  $Ti^{4+}$  et  $O^{2-}$  sont :

$$Ti^{4+} \quad (0, 0, 0) ; (1/2, 1/2, 1/2) \quad O^{2-} : \pm(u, u, 0) ; \pm(1/2 + u, 1/2 - u, 1/2) \quad \text{Avec } u = 0, 301$$

1) Démontrer que le facteur de structure  $F_{(hkl)} = \sum f_j e^{2\pi i (hx_j + ky_j + lz_j)}$  a pour expressions pour les plans (110) et (200).

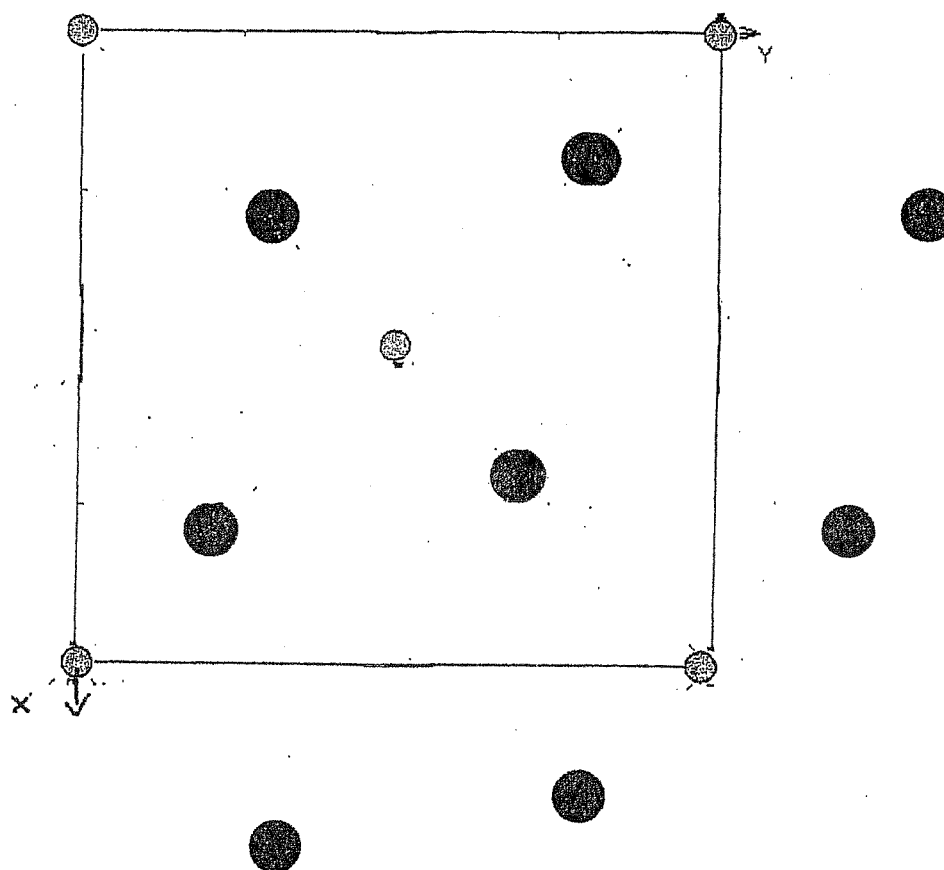
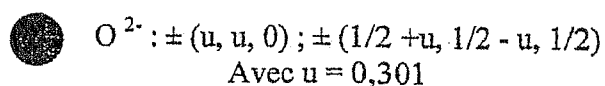
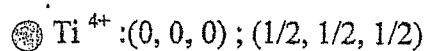
$$F_{(110)} = 2fTi^{4+} + 2fo^{2-} (\cos 4\pi u + 1) = 2[fTi^{4+} + fo^{2-}(X+1)] \quad \text{et}$$

$$F_{(200)} = 2fTi^{4+} + 2fo^{2-} (\cos 4\pi u) = 2[fTi^{4+} + 2X fo^{2-}] \quad \text{Avec } X = \cos 4\pi u$$

2) le rapport des facteurs de structure  $F_{(110)} / F_{(200)}$  étant égal à 3. Déterminer les deux valeurs mathématiquement possibles de la coordonnée fractionnaire u définissant la position de l'oxygène, sachant que les facteurs de diffusion des ions  $Ti^{4+}$  et  $O^{2-}$  valent respectivement 14 et 5.2 pour la réflexion 200 et 17.7 et 6.5 pour la réflexion 110.

3) Déterminer la classe de symétrie et le système cristallin de L'oxyde de Titane variété  $\alpha$

4) Représenter les éléments de symétrie  $4_2$ ,  $m$  et  $n$  sur la projection (001) de la structure.



5) Calculer la distance Ti-O, des ions situés dans le plan (xoy), correspondant à chacune des deux solutions calculées à la question N° 2.

6) Sachant que  $r(\text{Ti}^{4+}) = 0.605\text{\AA}$  et  $r(\text{O}^{2-}) = 1.36\text{\AA}$ , confirmer que la vraie valeur de la coordonnée fractionnaire définissant la position de l'oxygène est  $u=0,301$



\*\*\*\*\*

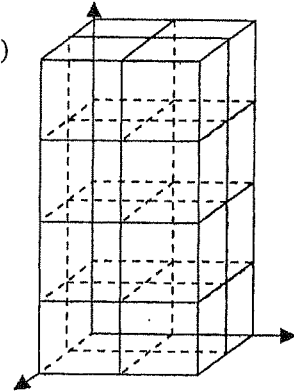
I. A Basse température  $\text{LiInO}_2$  cristallise dans le système quadratique et son mode est centré.

Les paramètres de la maille sont les suivants :  $a = 4.136 \text{ \AA}$  et  $c = 9.37 \text{ \AA}$ .

Les positions ioniques sont :  $\text{In}^{3+}$  : (0, 0, 0); (0, 1/2, 1/4);

$\text{Li}^+$  : (0, 0, 1/2); (0, 1/2, 3/4);  $\text{O}^{2-}$  : (0, 0, 1/4); (0, 0, 3/4); (1/2, 0, 1/2); (1/2, 0, 0)

- 1) Représenter la structure  $\text{LiInO}_2$  basse température.
- 2) Déterminer le nombre de groupement formulaire par maille.
- 3) Quelles sont les coordinences des ions  $\text{In}^{3+}$ ,  $\text{Li}^+$  et  $\text{O}^{2-}$  ?
- 4) A quel type structural peut-on rattacher  $\text{LiInO}_2$  ?
- 5) A plus haute température, les ions  $\text{In}^{3+}$  et  $\text{Li}^+$  se distribuent d'une façon statistique (aléatoire) dans la maille.
  - a) Quel est le réseau de Bravais de cette phase ?
  - b) A quelle structure connue ressemble  $\text{LiInO}_2$  désordonnée ?



II. Selon la taille des cations, les oxydes  $\text{M}_2\text{O}_3$  cristallisent suivant différentes structures, alors que l'oxyde  $\text{M}_3\text{O}_4$  cristallise dans une structure spinelle. Pour les cations de petites tailles, les familles de structures corindon-ilménite et celle des spinelles lacunaires sont stabilisées.

- 1) La structure corindon type  $\text{Al}_2\text{O}_3$  dérive de celle de  $\text{NiAs}$  et dont le paramètre  $c'$  de sa maille est tel que  $2c' = 3c$  ( $c$  étant le paramètre de la maille de  $\text{NiAs}$ ).
  - a) Schématiser la maille de  $\text{Al}_2\text{O}_3$  en présentant que les plans métalliques.
  - b) Quelle est la coordinence de  $\text{Al}^{3+}$  en précisant le taux de remplissage de ces sites.
  - c) Suivant quel axe sont ordonnées les lacunes présentes et quelle est par conséquent la nouvelle symétrie obtenue, comparez la avec celle de  $\text{NiAs}$ .
- 2) La structure ilménite type  $\text{FeTiO}_3$  stabilisant le fer ferrique  $\text{Fe}^{2+}$  et un cation tétravalent  $\text{Ti}^{4+}$ .
  - a) Précisez le type de la substitution opérée à partir de  $\text{Al}_2\text{O}_3$  en donnant cette réaction de substitution et la solution solide obtenue en fonction de  $x$  ( $0 \leq x \leq 1$ ).
  - b) Schématiser la maille de  $\text{FeTiO}_3$  en présentant que les plans métalliques (successivement un plan  $\text{Fe}^{2+}$ , un plan  $\text{Ti}^{4+}$ ).
  - c) Quel serait alors le paramètre  $c''$  de cette maille en fonction de  $c$ .
- 3) Un exemple de l'oxyde  $\text{M}_2\text{O}_3$  est une variété de celle de la rouille :  $\text{Fe}_2\text{O}_3(\gamma)$ .
  - a) Expliquer pourquoi on considère  $\text{Fe}_2\text{O}_3(\gamma)$  comme une spinelle lacunaire en donnant la réaction de son obtention par oxydation à partir de la magnétite  $\text{Fe}_3\text{O}_4$ .
  - b) Établir alors la formule brute de  $\text{Fe}_2\text{O}_3(\gamma)$  sous la forme  $\text{AB}_2\text{O}_4$  contenant des lacunes.
- 4) Le composé  $\text{M}_3\text{O}_4$  est supposé cristalliser dans une structure spinelle.
  - a) Donner sa formule en spinelle directe et en spinelle inverse et expliquer dans quel cas la magnétite  $\text{Fe}_3\text{O}_4$  est alors ferrimagnétique en donnant son moment magnétique.
  - b) Sachant que  $\text{O}^{2-}$  forment un empilement CFC, situer les ions  $\text{M}^{2+}$  et  $\text{M}^{3+}$  sous sa projection suivant le plan (001).
  - c) Donner une deuxième façon pour classer les spinelles.
  - d) Quels sont les facteurs qui règlent la position de  $\text{M}^{2+}$  et  $\text{M}^{3+}$  dans la structure spinelle.

Bonne Chance \*\*\*\*\* Bon Courage

Données :  $[r_{\text{Al}^{3+}}]_6 = 0.53 \text{ \AA}$  ;  $[r_{\text{Al}^{3+}}]_4 = 0.39 \text{ \AA}$  ;  $[r_{\text{Fe}^{2+}}]_6 = 0.74 \text{ \AA}$  ;  $[r_{\text{Ti}^{4+}}]_6 = 0.68 \text{ \AA}$  ;  $a = 3.96 \text{ \AA}$  ;  $c = 5.35 \text{ \AA}$  ;  
 $N = 6,02 \cdot 10^{23}$  ;  $M(\text{Fe}^{3+}) = 55.8450 \text{ g/mol}$  ;  $Z(\text{Fe}) = 26$  ;  $r(\text{Fe}^{2+}) = 0.75 \text{ \AA}$  ;  $r(\text{Fe}^{3+}) = 0.69 \text{ \AA}$  ;  $r(\text{Fe}^{2+}) = 0.75 \text{ \AA}$ .

**SMC3**  
**ELEMENT DE MODULE : CRISTALLOCHIMIE**  
**SESSION DE RATTRAPAGE**  
**DUREE 2H00**

+CLUB NAJAH+  
UCD.FS.ELJADIDA  
LE PRÉSIDENT

On se propose d'étudier des structures ioniques ou covalentes qui dérivent d'un empilement compact type hexagonal de paramètres  $a_H = 4,55 \text{ \AA}$   $c_H = 7,42 \text{ \AA}$ . On appelle **B** les atomes constituant l'empilement **HC** et **A** les atomes pouvant occuper les sites octaédriques.

Selon le taux de remplissage des sites octaédriques on distingue :

**A- Remplissage de la totalité des sites octaédriques**

- 1- Quelle est la formule et quel est le nom de ce type de structure. Préciser s'il s'agit d'une liaison ionique ou covalente en justifiant votre réponse.
- 2- Donner les coordonnées réduites en prenant l'origine sur l'atome B.
- 3- Dessiner la projection la maille dans le plan (ab). (on se limitera au 1/3 de la maille hexagonale).
- 4- Donner la coordinance des atomes A et B. Justifier votre réponse.
- 5- Donner le réseau de Bravais des atomes A et des atomes B.

**B- Remplissage de la moitié des sites octaédriques**

- 1- La formule de ce type de structure est  $AB_2$ , donner le nom de cette structure et préciser s'il s'agit d'une liaison ionique ou covalente.
- 2- Dessiner la maille en perspective en prenant l'origine sur l'atome A.
- 3- Donner les coordonnées réduites.
- 4- Donner le nombre de motif par pseudo maille.
- 5- Trouver la coordinance des atomes A et B.

**C- Remplissage de 2/3 des sites octaédriques**

- 1- Dans ce cas le type de structure est le corindon, donner sa formule et citer un exemple de composé qui présente ce type structural.
- 2- Tracer la maille en perspective en prenant l'origine sur un cation (on se limitera au 1/3 de la maille hexagonale).
- 3- Trouver le nombre de motif par pseudo maille.
- 4- Trouver la coordinance des ions.
- 5- Déterminer les nouveaux paramètres  $a'$  et  $c'$  de la maille en fonction de  $a_H$  et  $c_H$ .

**D- Remplissage de 1/3 des sites octaédriques**

- 1- Le composé iodure de bismuth de formule  $BiI_3$  cristallise dans ce type de structure sachant que les ions  $I^-$  occupent les positions de l'HC et les ions  $Bi^{3+}$  occupent le 1/3 des sites octaédriques ; représenter la maille en perspective.
- 2- Quelle est la coordinance des différents ions.
- 3- Déterminer le nombre de motif par pseudo maille.
- 4- Les paramètres de la maille  $a''$  et  $c''$  diffèrent-ils de ceux obtenus dans la partie C. Justifier votre réponse.

## I. LE COMPOSE $\text{Fe}_3\text{O}_4$

Le composé  $\text{Fe}_3\text{O}_4$ , appelé couramment magnétite vue ses propriétés magnétiques remarquables liées à sa structure cristalline. Elle cristallise dans une structure spinelle inverse dont la maille est représentée par la figure1.

1. Ecrire la formule développée de  $\text{Fe}_3\text{O}_4$  en précisant la répartition des ions  $\text{Fe}^{2+}$  et  $\text{Fe}^{3+}$  dans les sites du réseau.
2. Placer ces ions sur le schéma de la structure, en complétant la maille ci-jointe.
3. Préciser la coordinence de chacun des ions, le nombre de motif par maille. En déduire le mode de réseau.
4. On substitue l'oxygène par le fluor pour obtenir une magnétite oxyfluoré,  $\text{Fe}_3\text{O}_{4-x}\text{F}_x$ . Cette substitution entraîne une diminution des charges anioniques qui va être compensée par les charges cationiques.
  - a). Donner la formule développée de  $\text{Fe}_3\text{O}_{4-x}\text{F}_x$ , en faisant apparaître les ions  $\text{Fe}^{2+}$  et  $\text{Fe}^{3+}$ .
  - b). Donner les deux distributions possibles.

## II. LE CUPRATE DE BISMUTE

Le cuprate de bismuth :  $\text{Bi}_x\text{Sr}_y\text{Ca}_z\text{Cu}_r\text{O}_t$  présente la structure ci-dessous (Figure 2). Déterminer :

1. Le système cristallin correspondant.
2. La coordinence de chacun des ions.
3. Sachant que le nombre de motif/maille est égal à 1, déterminer la formule du cuprate.
4. En analysant la structure sachant que  $c=37.1 \text{ \AA}$  ;  $a = 5.41 \text{ \AA}$  et  $b= 5.42$ , proposer un type structural pour  $\text{Bi}_x\text{Sr}_y\text{Ca}_z\text{Cu}_r\text{O}_t$ .
5. Donner les coordonnées réduites de chacun des ions présents.
6. Donner la projection de cette structure sur le plan réticulaire (001).

## III. BRONZE QUADRATIQUE

En analysant La structure de la phase  $\text{Bi}_x\text{La}_y\text{Ti}_z\text{O}_t$  de la famille représentée par la Figure 3, déterminez :

1. La formule exacte du composé.
2. La coordinence de chacun des ions.
3. Sachant que cette structure dérive d'un type structural connu par juxtaposition de 4 cubes, préciser ce type structural et la manière dont dérive cette structure.
4. Donner les coordonnées réduites de chacun des ions présents.
5. Donner la projection de cette structure sur le plan réticulaire (001).

**FILIERE SMC3**  
**EXAMEN DE L'ELEMENT DE MODULE**  
**CRISTALLOCHIMIE**

La majorité des composés fluorés présentent un caractère ionique à cause de la forte électronégativité du fluor. Les fluorures ioniques possèdent des structures semblables aux oxydes. On se propose d'étudier la structure ionique de certains fluorures :

**A- Le fluorure d'aluminium :  $\text{AlF}_3$**

Le composé  $\text{AlF}_3$  cristallise dans le système cubique. Il possède la structure type  $\text{ReO}_3$  :

- 1- Décrire la structure.
- 2- Dessiner la maille en perspective et tracer sa projection dans le plan (a,b).
- 3- Donner le nombre de groupement formulaire.
- 4- Donner la coordinance des ions  $\text{Al}^{3+}$  et  $\text{F}^-$ .

**B- Le fluorure de césium et de fer :  $\text{CsFeF}_3$**

La structure de ce fluorure dérive de celle de  $\text{ReO}_3$  (décrite dans la partie A) dans laquelle les ions  $\text{Fe}^{2+}$  remplacent les ions  $\text{Re}^{6+}$ , les ions  $\text{F}^-$  remplacent les ions  $\text{O}^{2-}$  et les ions  $\text{Cs}^+$  occupent le centre de la maille.

- 1- A quel type structural connu peut on rattacher cette structure ?
- 2- Dessiner la maille en perspective en prenant l'origine sur le cation  $\text{Cs}^+$ .
- 3- Donner les coordonnées réduites de tous les ions.
- 4- Trouver la coordinance des cations et de l'anion.
- 5- Trouver la condition de Goldschmit qui règle la géométrie de la structure.

**C- Les fluorures mixtes de formule générale  $\text{A}_2\text{NMF}_6$**

Il existe des fluorures de formule générale  $\text{A}_2\text{NMF}_6$  avec A et N sont des cations monovalents et M est un cation trivalent. Ces phases peuvent être décrites comme une double pérovskite ordonnée selon une seule direction  $a' = 2a_{\text{perovskite}}$ . L'ordre est tel que l'élément B dans la formule  $\text{ABO}_3$  va être remplacé alternativement par les éléments N et M de la formule  $\text{A}_2\text{NMF}_6$ .

- 1- Trouver en tenant compte des rayons ioniques de A, N et M deux composés qui peuvent présenter ce type de structure.
- 2- Quel type de déformation obtient-on dans la phase ordonnée ?
- 3- Représenter en perspective cette structure.
- 4- Donner les coordonnées réduites des différents ions.
- 5- Déterminer les paramètres de la maille de la phase  $\text{A}_2\text{NMF}_6$  ordonnée.
- 6- Retrouver l'expression du facteur de tolérance :

$$t = \frac{(r_{A+} + r_{F-})\sqrt{2}}{(r_{N+} + r_{M3+} + 2r_{F-})}$$

**Données :**

Ions	$\text{Cs}^+$	$\text{Li}^+$	$\text{Na}^+$	$\text{Ba}^{2+}$	$\text{Ca}^{2+}$	$\text{Fe}^{2+}$	$\text{Ga}^{3+}$	$\text{La}^{3+}$	$\text{Al}^{3+}$	$\text{Ti}^{4+}$	$\text{O}^{2-}$	$\text{F}^-$
r(Å)	1,7	0,68	0,97	1,6	1,35	0,61	0,62	1,16	0,50	0,605	1,4	1,36

$$a_{\text{perovskite}} = 4,08 \text{ Å}$$



MODULE : CHIMIE MINERALE  
ELEMENT DE MODULE : CRISTALLOCHIMIE

Pr. K. Benkhouja

Selon la taille des cations, les oxydes  $M_2O_3$  cristallisent suivant différentes structures alors que l'oxyde  $M_3O_4$  cristallise dans une structure spinelle.

I) Concernant les oxydes  $M_2O_3$  et pour les petites tailles des cations, les familles de structures corindon-ilménite et celle des spinelles lacunaires sont stabilisées.

- 1) La structure corindon type  $Al_2O_3$  dérive de celle de NiAs et dont le paramètre  $c'$  de sa maille est tel que  $2c' = 3c$  ( $c$  étant le paramètre de la maille de NiAs).
  - a) Schématiser la maille de  $Al_2O_3$  en présentant que les plans métalliques.
  - b) Quelle est la coordinence de  $Al^{3+}$  en précisant le taux de remplissage de ces sites.
  - c) Suivant quel axe sont ordonnées les lacunes présentes et quelle est par conséquent la nouvelle symétrie obtenue, comparez la avec celle de NiAs.
- 2) La structure ilménite type  $FeTiO_3$  stabilisant le fer ferrique  $Fe^{2+}$  et un cation tétravalent  $Ti^{4+}$ .
  - a) Précisez le type de la substitution opérée à partir de  $Al_2O_3$  en donnant cette réaction de substitution et la solution solide obtenue en fonction de  $x$  ( $0 \leq x \leq 1$ )
  - b) Schématiser la maille de  $FeTiO_3$  en présentant que les plans métalliques (successivement un plan  $Fe^{2+}$ , un plan  $Ti^{4+}$ ).
  - c) Quel serait alors le paramètre  $c''$  de cette maille en fonction de  $c$ .
- 3) Un exemple de l'oxyde  $M_2O_3$  est une variété de celle de la rouille :  $Fe_2O_3(\gamma)$ .
  - a) Expliquer pourquoi on considère  $Fe_2O_3(\gamma)$  comme un spinelle lacunaire en donnant la réaction de son obtention par oxydation à partir de la magnétite  $Fe_3O_4$ .
  - b) Etablir alors la formule brute de  $Fe_2O_3(\gamma)$  sous la forme  $AB_2O_4$  contenant des lacunes.

II) Le composé  $M_3O_4$  est supposé cristalliser dans une structure spinelle.

- 1) Donner sa formule en spinelle directe et en spinelle inverse et expliquer dans quel cas la magnétite  $Fe_3O_4$  est alors ferrimagnétique en donnant son moment magnétique.
- 2) Sachant que  $O^{2-}$  forment un empilement CFC, situer les ions  $M^{2+}$  et  $M^{3+}$  sous sa représentation de spinelle directe  $MM_2O_4$  de paramètre  $a = a(\text{spinelle})/2$  en donnant sa projection suivant le plan (001).
- 3) Donner une deuxième façon pour classer les spinelles.
- 4) Quels sont les facteurs qui règlent la position de  $M^{2+}$  et  $M^{3+}$  dans la structure spinelle.

**Données :** Rayon ionique de  $Al^{3+}$  dans un site Octaédrique:  $[r_{Al^{3+}}]_6 = 0.53(\text{\AA})$  ;  
Rayon ionique de  $Al^{3+}$  dans un site Tétraédrique:  $[r_{Al^{3+}}]_4 = 0.39(\text{\AA})$  ;  
 $[r_{Fe^{2+}}]_6 = 0.74(\text{\AA})$  ;  $[r_{Ti^{4+}}]_6 = 0.68(\text{\AA})$  ;  $r(Fe^{3+}) = 0.69(\text{\AA})$  ;  
 $M(Fe^{3+}) = 55.845(\text{g/mol})$  ;  $Z(Fe) = 26$  ;  
 $(Al^{3+}) : 1s^2s^2p^6$  ,  $N = 6,02.10^{23}$  ;

Bonne Chance

\*\*\*\*\* Bon courage

EPREUVE SUR LA CRISTALLOCHIMIE

Pr. K. Benkhrouja

Selon la taille des cations, les oxydes  $M_2O_3$  cristallisent suivant différentes structures.

I) Pour les petites tailles des cations, les familles de structures corindon-ilménite et celle des spinelles lacunaires sont stabilisées.

1) La structure corindon type  $Al_2O_3$  dérive de celle de  $NiAs$  et dont le paramètre  $c'$  de sa maille est tel que  $2c' = 3c$  ( $c$  étant le paramètre de la maille de  $NiAs$ ).

- Schématisez la maille de  $Al_2O_3$  en présentant que les plans métalliques.
- Quelle est la coordinence de  $Al^{3+}$  en précisant le taux de remplissage de ces sites.
- Suivant quel axe sont ordonnées les lacunes présentes et quelle est par conséquent la nouvelle symétrie obtenue, comparez la avec celle de  $NiAs$ .

2) La structure ilménite type  $FeTiO_3$  stabilisant le fer ferrique  $Fe^{2+}$  et un cation tétravalent  $Ti^{4+}$ .

- Précisez le type de la substitution opérée à partir de  $Al_2O_3$  en donnant cette réaction de substitution et la solution solide obtenue en fonction de  $x$  ( $0 \leq x \leq 1$ )
- Schématisez la maille de  $FeTiO_3$  en présentant que les plans métalliques (successivement un plan  $Fe^{2+}$ , un plan  $Ti^{4+}$ ).
- Quel serait alors le paramètre  $c''$  de cette maille en fonction de  $c$ .

3) La structure spinelle lacunaire type  $Fe_2O_3(\gamma)$ .

- Sans décrire cette structure, écrivez la formule de cet oxyde en faisant apparaître les cations dans différents sites de la structure spinelle.
- Quelle est la formulation de la solution solide continue entre les spinelles directes  $Co(Al_2)O_4$  ( $a_{Co(Al_2)O_4} = 8.11(\text{\AA})$ ) et  $Zn(Al_2)O_4$  ( $a_{Zn(Al_2)O_4} = 8.08(\text{\AA})$ ) obtenus par réactions respectives de  $Al_2O_3$  sur  $CoO$  et  $ZnO$
- Si la loi de VEGARD était suivie quelle est la composition correspondant à un paramètre  $a = 8.095(\text{\AA})$ .
- Tracez l'évolution du moment magnétique  $\mu_s$  en fonction de  $x$  ( $0 \leq x \leq 1$ ) dans cette solution solide.

II) Pour les gros cations tels que les terres rares, la structure de l'oxyde  $M_2O_3$  dérive de celle de la structure Fluorine  $CaF_2$ .

- Explicitiez ce cas dans l'oxyde de praséodyme  $Pr_2O_3$  par une réaction chimique faisant apparaître un pourcentage de 25% de lacunes anioniques et déduire alors comment peut-on considérer la structure de  $Pr_2O_3$ .
- Ces défauts sont-ils de type Schottky ou Frenkel ? Expliquez.
- Sachant que ces défauts sont ordonnés suivant les axes cristallographiques  $[110]$  et  $[111]$ ; expliquez comment la technique de diffraction des rayons X peut déceler cet ordre.
- Quelles conséquences traduirait cet ordre sur soit le paramètre  $a_F$  de la structure Fluorine soit sur sa symétrie cubique.

\*\*\*\*\*

Données : Rayon ionique de  $Al^{3+}$  dans un site Octaédrique:  $[r_{Al^{3+}}]_6 = 0.53(\text{\AA})$  ;  
Rayon ionique de  $Al^{3+}$  dans un site Tétraédrique:  $[r_{Al^{3+}}]_4 = 0.39(\text{\AA})$  ;  $[r_{Fe^{2+}}]_6 = 0.74(\text{\AA})$  ;  
 $[r_{Ti^{4+}}]_6 = 0.68(\text{\AA})$  ;  $[r_{Pr^{3+}}]_6 = 1.06(\text{\AA})$  ;  $(Al^{3+})$ :  $1s^2 s^2 2p^6$  ;  $(Co^{2+})$ : .....  $3d^7$  ;  $(Zn^{2+})$ : .....  $3d^{10}$

\*\*\*\*\*